

噪声干扰环境下抑制 EMD 模态混叠方法

黎 恒¹ 李 智^{2,3} 莫 玮¹ 张绍荣²

(1. 西安电子科技大学机电工程学院, 陕西西安 710071; 2. 桂林航天工业学院自动化系, 广西桂林 541004;
3. 桂林电子科技大学电子工程与自动化学院, 广西桂林 541004)

摘 要: 经验模态分解(EMD)作为时频分析的经典算法, 已经得到广泛的应用。然而, 其分解质量容易受到噪声等干扰的影响, 产生模态混叠问题。本文针对经验模态分解中因噪声存在的模态混叠问题, 提出一种自适应的预处理方法。首先对输入信号进行 B 样条最小二乘拟合, 消除了噪声的影响后, 再进行 EMD 分解。为提高算法的自适应性, 提出了一种基于极值点出现时刻的节点选取方法。对线性信号与非线性信号的仿真实验表明该方法有较高的分解精度; 与聚合经验模态分解方法(EEMD)的分析对比结果表明该方法能很好地抑制噪声引起的模态混叠。

关键词: 经验模态分解; 模态混叠; B 样条拟合; 时频分析; 信号分解

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0530(2015)08-0956-06

Resolving the Mode-mixing Problem of EMD in the Presence of Noise

LI Heng¹ LI Zhi^{2,3} MO Wei¹ ZHANG Shao-rong²

(1. School of Mechano-Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China;
2. Department of automation, Guilin University of Aerospace Technology, Guilin, Guangxi 541004, China;
3. School of Electronic Engineering and Automation, Guilin University of Electronic
Technology, Guilin, Guangxi 541004, China)

Abstract: Empirical mode decomposition has become an established tool for time-frequency analysis and has been widely used. However, a major problem is that its performance of EMD may be affected by intermittence or noise, known as the mode-mixing problem. In order to overcome the mode-mixing problem in the empirical mode decomposition (EMD) algorithm, an adaptive pre-processing technique is proposed. In this work, B-spline least squares approximation is first studied and employed before the use of EMD to eliminate the noise which may result in mode mixing. After that, a knot placement iteration algorithm using the extrema time location is put forward to enhance the adaptive property of the proposed method. Simulations of linear and non-linear signals show that it is capable of significantly reducing mode-mixing problem caused by noise. Comparisons between the proposed method and EEMD method are carried out, indicating that the proposed method is superior to existing methods in accuracy.

Key words: empirical mode decomposition; mode-mixing; B-spline approximation; time-frequency analyze; signal decomposition

1 引言

基于希尔伯特变换的分析是现代时频分析中的经典方法。希尔伯特谱具有时间频率分辨率高, 精度好等优点, 并适用于非线性和非平稳信号。然

而希尔伯特变换只适用于“单分量信号”, 即只含有一种震荡模式的信号。对多分量信号, 必须首先将其进行分解成一系列单分量信号, 再分别进行希尔伯特变换得到时频谱。经验模态分解(EMD)即是把多分量输入信号分解成一系列单分量信号的方

法^[1],已经成为分解非线性和非平稳时间序列的有效工具。EMD 以信号极值点作为时间尺度,分别对极大值点和极小值点进行三次样条插值得到信号的上包络和下包络,取上下包络的平均作为均值信号并从输入信号中剔除。不断地重复均值信号的剔除过程最终将得到一种关于时间轴对称的信号,称为本征模态函数(IMF)。IMF 被认为是一种适合希尔伯特分析的单分量信号。与傅里叶分解和小波分解不同,EMD 方法不需要基函数,是一种非先验、自适应的信号分解方法,这使 EMD 一经提出就在不同的领域得到应用^[2-5]。尽管如此,因为 EMD 方法目前还缺少严谨的理论框架支持,该方法仍存在一些需要解决的问题,其中模态混叠是其主要问题之一。

在实际分析中,信号通常混有间断或噪声,如语音信号,这些间断事件会打乱信号极值点的一致分布。对这些信号进行 EMD 分解时,将产生时间尺度不一致的上包络和下包络,从而导致 IMF 时间尺度的不一致。这种现象称为模态混叠^[7],表现为差异较大的模态出现在同一个 IMF 中,或相近的时间尺度分布在不同 IMF 中。模态混叠会使 IMF 中出现虚假的模态分量,甚至会导致其失去物理意义。为应对模态混叠问题,EMD 的倡导者 Huang 建议在进行极值点选择前首先进行间断测试^[7]。但是间断测试指标的确定较为困难,不适用于复杂信号。随后,Wu 和 Huang 等^[8]又提出聚合经验模态分解方法(EEMD),先对信号注入白噪声进行 EMD 分解,再取多次分解结果的集总平均作为输出。EEMD 方法利用 EMD 对白噪声的滤波器组性质,能较好地将不同模态根据其所在的频段实现分离。Mandic^[9-10]等将多元经验模态分解和噪声相结合,提出噪声辅助多元经验模态分解方法(NA-MEMD),同样使用了加入噪声作为抑制模态混叠的辅助手段。这些基于噪声辅助的模态混叠抑制方法是目前较为主流的改进方法,并得到了广泛的应用。噪声辅助在一定程度上抑制了模态混叠,但是性能容易受到噪声信号幅度和噪声通道数量等参数的影响,噪声幅度太小不会足以引起信号极值点的变化,太大则会泄漏到输入信号通道而造成干扰。虽然增加噪声通道数量可以在一定程度上减少从噪声通道到信号通道的泄漏,但是这样做会大大增加计算的复杂度。除了噪声辅助方法,一些学者针对某些特殊信号建模并提出改进算法,如文献^[11],只适用于 AM-FM 模型的模态混叠抑制。

因为现有模态混叠抑制方法存在的种种不足,有

必要对进行补充和改进。从先前的分析可知,只要消除信号极值点时间尺度分布的不一致,就可以解决模态混叠问题。基于以上考虑,本文使用基于 B 样条最小二乘拟合的预处理算法改善时间尺度分布。值得注意的是,B 样条已经在 EMD 改进中得到了应用,但是这些改进与模态混叠无关。如文献^[12]以信号极值点的二项均值作为控制系数进行均值求解,文献^[13]使用 B 样条插值代替三次样条插值进行上下包络的计算。这些方法是基于插值的方法,目的是对 EMD 的理论框架进行探索和补充,其性能与 EMD 相似,没有改善模态混叠现象。因此,现有基于 B 样条的 EMD 改进方法与本文方法有较大不同。

2 基于 B 样条最小二乘拟合的 EMD 方法

EMD 的目的是通过一种成分筛选的算法从输入信号 $y(t)$ 提取 IMF,分解结束后,输入信号表示为:

$$y(t) = \sum_k imf_k(t) + r(t) \quad (1)$$

其中 $r(t)$ 为单调变化的剩余信号。EMD 方法选取信号极值点作为尺度特征,首先找出输入信号的极大值和极小值点,然后对极大值点进行插值得到上包络,对极小值点插值得到下包络,取上下包络的均值并从信号中剔除,不断重复这个过程得到一个上下包络对称的 IMF。关于 EMD 算法的详细过程和实现方法可以参考文献^[1]。EMD 算法认为,极值点时间尺度包含了信号震荡的隐含特征,一致的极值点分布代表了一致的局部震荡。本文方法同样认为极值点的分布代表着信号的局部时间尺度,与 EMD 方法不同的是,本文的预处理方法只需要极值点出现时刻的信息,不需取值信息。

2.1 B 样条最小二乘拟合

B 样条最小二乘是拟合线性和非线性曲线的重要工具,拟合信号可以弱化间断事件对信号的影响,从而抑制 EMD 分解的模态混叠效应。下面对 B 样条最小二乘拟合的基本原理进行简单介绍。对给定时间序列

$$\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^n \quad x \in [a, b]$$

则该时间序列的 k 阶 B 样条拟合曲线表示为:

$$B(t) = \sum_{i=-k+2}^N c_i B_i^k(t) \quad (2)$$

其中 c_i 为待求解的控制系数, $B_i^k(t)$ 为 k 阶 B 样条函数。在区域 $[a, b]$ 上对 x 作分划 $\{a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b\}$ 并扩充为节点 t_{knot} :

$$\{t_{-k+2} \leq \dots \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq t_{n+1} \dots \leq t_{n+k-1}\}$$

关于给定时间序列的 k 阶 ($k-1$ 次) B 样条基函数 $B_i^k(t)$ 根据 deBoor-Cox 递推公式计算:

$$B_i^1(t) = \begin{cases} 1, & t_i < t \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$B_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(t) \quad (3)$$

对于给定的时间序列 $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^n$, B 样条最小二乘拟合问题即求解式 (4) 中的最小化问题, 得到控制系数 c_i 。

$$\varepsilon^2 = \sum_{j=1}^n |B(x_j) - y_j|^2 = \min \quad (4)$$

从拟合过程看, 节点的选择对控制系数的解有直接影响, 从而决定了拟合曲线的性质。拟合过程可以看成是对信号低通滤波的过程。研究表明^[14], 对时间间隔为 τ 的节点, B 样条拟合相当于对信号进行截至频率为 $1/2\tau$ 的低通滤波。非等间隔节点的 B 样条拟合, 局部滤波性质与等间隔节点拟合类似。容易得知, 拟合过程即是剔除高频干扰分量, 保留信号形态的过程。EMD 方法认为, 信号的极值点分布包含着局部震荡尺度的信息。因此, 本文以信号的极值点作为节点进行拟合, 首先根据输入信号的极值点生成初始节点进行拟合, 再选取拟合结果曲线的极值点生成新的节点进行下一轮拟合, 不断重复这个过程将得到一系列新的节点。当这些节点对应的拟合曲线趋于稳定时, 迭代终止, 从而得到最终的节点和该节点所对应的拟合曲线。实验表明, 该方法在强间断信号和噪声的情况下, 仍然能保持较高的分解精度。

2.2 基于 B 样条拟合的 EMD 方法

对给定的时间序列 $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^n$, 记为 $y(t)$, B 样条拟合 EMD 方法 (SAEMD) 按如下步骤进行:

1) 找到 $y(t)$ 的极值点出现的时刻, 得到的序列记为 t_{extr} ;

2) 将 t_{extr} 进行扩充得到节点 t_{knot} , 对 $y(t)$ 做 B 样条最小二乘拟合, 得到的曲线记为 $m(t)$;

3) 找到 $m(t)$ 的极值点分布的时刻, 得到新的 t_{extr} ;

4) 重复步骤 2) 和 3), 直到满足

$$\frac{1}{N} \sum (m_{i+1}(t) - m_i(t))^2 \leq \sigma \quad (5)$$

其中 σ 为不小于 0 的预设值。

5) 将步骤 4) 得到的拟合曲线 $m(t)$ 做标准

EMD 分解, 取第一阶 IMF 分量, 记为 $y_{imf}(t)$;

6) 令余量 $\overline{y}(t) = y(t) - y_{imf}(t)$ 并将 $\overline{y}(t)$ 看作一个新的 c 并重复上述步骤。

为避免采样率和噪声对分解结果的影响, 实际应用中选取的采样率通常远大于模态信号的奈奎斯特频率。在这种情况下, 步骤 1 中的初始时间点 t_{extr} 可选取等间隔时间点, 如以 8 个采样点为间隔的序列 $\{t_m\}_{m=1,9,17,\dots}$, 这样可以减少迭代次数。为抑制边缘效应, 步骤 1 中对 $y(t)$ 在边界点使用噪声拓延。

进行 B 样条拟合时需要构造 k 阶基函数, 一般而言, 阶数 k 越高, 拟合精度越高, 但与此同时计算量与所需存储空间也越大。对大部分应用, 建议 k 取 6 或 8。由于目前任意节点的 B 样条拟合还缺少完整的理论体系, 本文方法收敛性的严格理论推导还需做进一步研究。步骤 4 给出了算法的终止条件, 即对相隔两次迭代的均值曲线的变化程度进行了阈值限制。该终止条件也可以使用其他条件代替, 如判断均值曲线极值点的个数与上次迭代的是否一致。

2.3 算法讨论

首先从分解得到 IMF 的排列顺序上看。从 EMD 的基本原理可知, EMD 首先剔除的是频率较低的信号, 保留频率较高的信号。因此 EMD 方法对给定输入信号, EMD 总是先分解出频率较高的 IMF。本文提出的 SAEMD 基于 B 样条最小二乘拟合, 与标准 EMD 的筛分情况有所不同。为了抑制模态混叠, SAEMD 在迭代过程中必须首先剔除较微弱的高频干扰信号, 而保留模态一致性较好的信号。这样, SAEMD 分解出的第一阶 IMF 是与输入信号相比最“匹配”的模态。SAEMD 分解得到的 IMF 是按照“匹配度”顺序从高到低排列的, 因此首先输出的 IMF 往往不一定是频率最高的信号分量。然而, 正是由于这种特性, 使得 SAEMD 在存在噪声的情况下仍能保持输出模态尺度的一致性。

其次从算法耗时上进行比较。以 3.2 小节中的 2000 样点信号分解为例。在 CPU 为双核 2.3G, 内存 2G 系统环境下, EMD 分解耗时 0.32 s, BAEMD 耗时 0.85 s, 而使用 100 个聚合样本的 EEMD 耗时为 30 s。将输入信号样点数改成 10000, EMD 耗时 2 s, BAEMD 耗时 5.7 s, EEMD 耗时 182 s。因此从耗时上看得知: $t_{EMD} < t_{SAEMD} \ll t_{EEMD}$ 。EEMD 的耗时主要集中在对大量样本进行 EMD 分解上, 耗时关系约为 $t_{EEMD} \approx nt_{EMD}$, 其中 n 为 EEMD 的加噪样本数。SAEMD 的主要耗时集中在求解式 (4) 的最优化问

题上。输入时间序列的样点数越多, B 样条基函数阶数越高, 则方程的矩阵越大而导致耗时越多。当输入信号样点数增加时, SAEMD 的耗时变高, 同时将占用较多内存。因此在对大样点数信号进行 SAEMD 分解时, 建议使用分段处理的方法。

3 仿真实验

本节对含噪声信号进行 SAEMD 分解, 并与 EEMD 方法进行对比。除非有特殊说明, 本节中 SAEMD 参数设置为: B 样条阶数 k 取 6; 步骤 4) 中 σ 取 0.01; 初始节点取间隔为 4 的等间隔序列; EEMD 方法参数设置为: 集总平均数取 100, 加性噪声方差取 0.2。

3.1 精度

首先考察本文方法在噪声下的分解精度, 以加高斯白噪声的 50 Hz 单音信号 $x(t) = \cos(2\pi \times 50t)$ 来研究, 其中采样率 $f_s = 1000$ Hz, 信噪比 (SNR) 取 -5 ~ 10 dB。对信号分别进行 SAEMD 和 EEMD 分解, 并进行比较。使用下式来评估模态与真实值的偏离程度:

$$\nu = \frac{\|h - x\|_{L2}}{\|x\|_{L2}} \quad (6)$$

其中 h 为分解结果中对应着 $x(t)$ 的模态。 ν 越接近零, 说明结果与真实值越接近。比较情况如图 1 所示, 可以看出:

1) 随着 SNR 的降低, 分解精度变差, 其中 EEMD 受到的影响更为显著;

2) SAEMD 的分解精度普遍优于 EEMD 方法, 在 SNR 较低时, 仍能保持较高的分解精度。

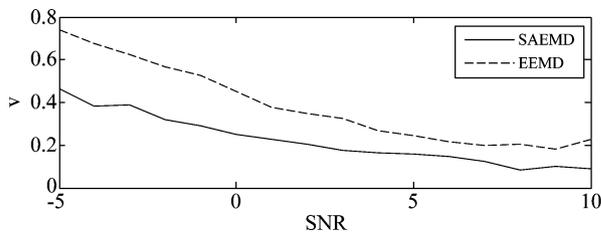


图 1 单音信号在各种信噪比下分解情况

Fig. 1 Decomposition performance of noisy single tone signal under various SNR

3.2 线性信号分解

EMD 对含噪声信号分解时会产生模态混叠现象。在希尔伯特变换得到的时间-频率分布谱上表现为, 信号分量的时频曲线严重失真, 出现大幅震荡和断裂。本小节通过对线性信号分解的希尔伯特谱观察模态混叠时造成时频谱的失真现象, 并比较 EE-

MD 和 SAEMD 对模态混叠的抑制性能。该信号包含 80 Hz, 32 Hz 和 8 Hz 三种频率, 采样率取 1000 Hz, SNR 为 8 dB。为了较为直观地观察分解性能, 从时频分布情况进行比较。图 2 给出了 EMD, EEMD 和 SAEMD 分解的希尔伯特谱。理想情况下, 时频谱中应在信号所包含的三种分量对应的频率点出现较明显的谱线 (线性信号为直线)。EMD 分解结果出现了较严重的时频失真, 谱线的震荡和断裂现象较严重。EEMD 成功实现了频率较低的两个分量的分离, 但是 80 Hz 分量仍然出现较严重的震荡。SAEMD 与 EEMD 相比震荡现象较弱, 因此失真更低。SAEMD 分解结果中可以清楚地看到三个信号分量的频率随时间分布的情况。值得注意的是, 高频信号的分解质量较容易受到噪声干扰的影响。从图中可以看到, 本文方法得到的 80 Hz 分量谱线能量分布更集中, 分解质量得到了较大的提高。

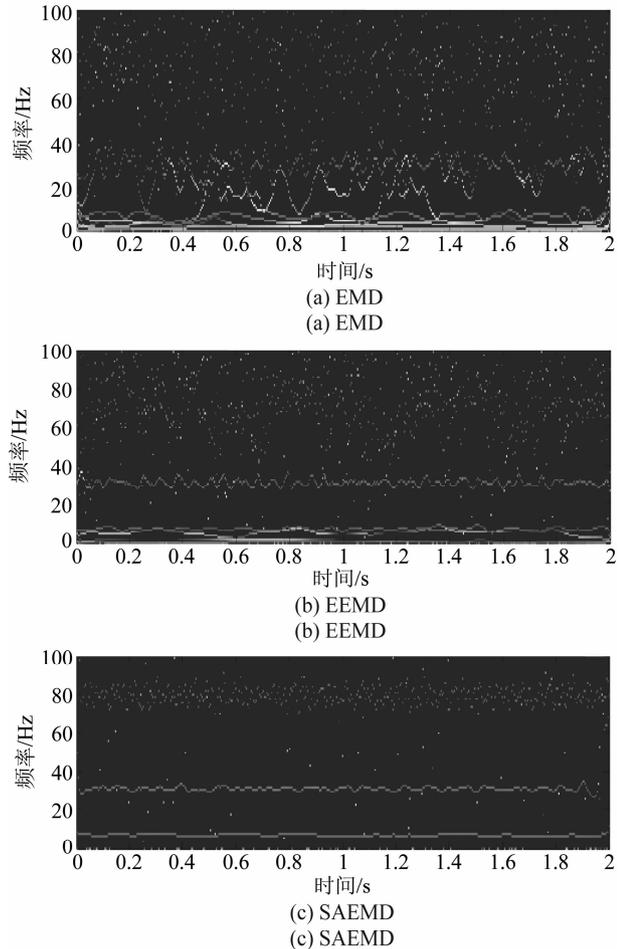


图 2 线性信号分解情况

Fig. 2 Decomposition of linear signal

3.3 非平稳信号分解

本小节说明 SAEMD 对非平稳信号分解不但能抑制模态混叠,而且能保留 EMD 利用信号局部尺度特征分解的优点。前言部分提到, EEMD 利用了 EMD 对噪声的滤波器性质进行信号在频域上的分离。但是,这种滤波器存在一个较严重的问题,即 EMD 对噪声体现出的滤波器频率特性不是“时变的”。因此, EEMD 对频率特征随时间变化的非平稳信号(如 FM 信号)进行分解时,相当于对信号施加截止频率固定的滤波器。这样会导致分解得到的信号在时域上出现割裂现象,影响时频谱的准确性。以图 3(a)所示的含噪 FM 信号 $x(t) = \cos((0.18 + 0.08t)2\pi ft)$ 为例,其中 $f = 80$ Hz, 采样率为 1000 Hz。对该信号分别进行 EEMD 和 SAEMD 分解。限于篇幅,本文给出主要 IMF。从图 3(b) 可以看到 EEMD 在一定程度上抑制了模态混叠。但是该结果出现了较明显的失真,表现为幅度的一致性较差;噪声抑制的效果有限导致部分严重变形;信号被分割成三个 IMF 分量,在过度区域的幅度明显与原信号相异。图 3(c) 给出了 SAEMD 的分解结果,可以看出本文方法得到了较为完整的模态,没有出现明显的失真。图 4 给出了分解结果的希尔伯特谱。EEMD 结果的时频分布较为杂乱,谱线出现明显的断裂和震荡。SAEMD 的谱线分布更为集中。回顾 2.1 中对 B 样条拟合的介绍可知其具有局部低通滤波器的性质,其频率特性是可以随时间变化而变化的。这是本文方法对非平稳信号分解仍能保留较完整的时频特征的原因。我们知道, EMD 的优点之一是充分利用信号的局部尺度特性进行分解,因此在不含噪声情况下, EMD 有能力分离并得到完整的 FM 信号。从本小节的实验看, EEMD 更像是使用了信号的全局尺度特性。相比之下, SAEMD 很好地继承了 EMD 的优点,得到了较完整的信号分量,体现出本文方法的优越性。

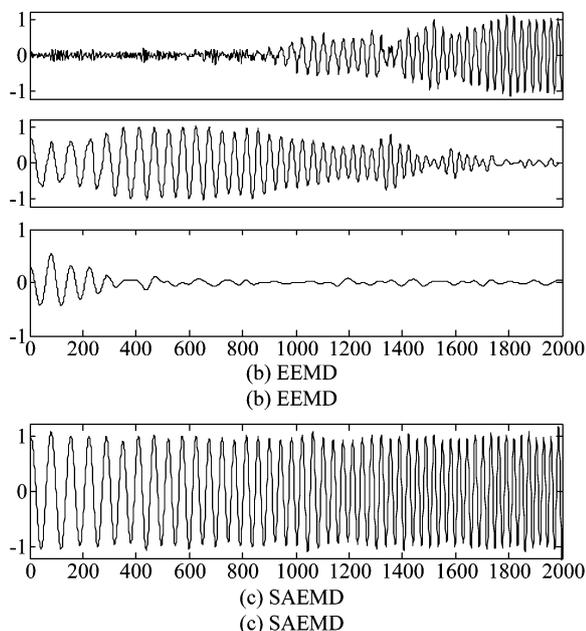
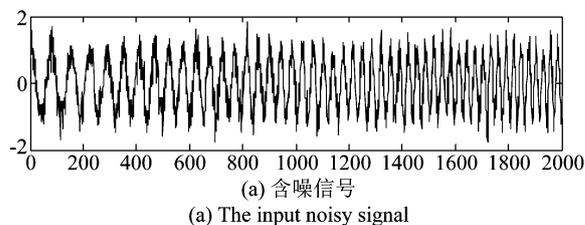


图3 含噪声非平稳信号分解结果对比

Fig. 3 Decomposition of noisy non-linear signal

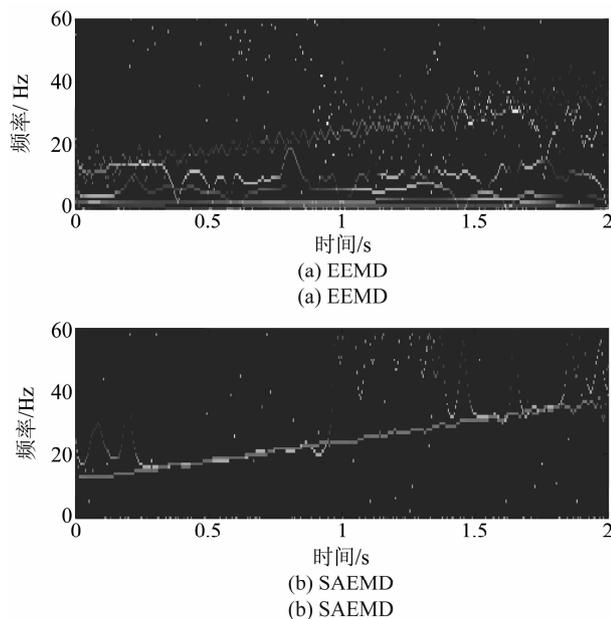


图4 非线性信号分解希尔伯特谱

Fig. 4 Hilbert spectrum of the non-linear signal decomposition

4 结论

经验模态分解-希尔伯特谱法的分析质量在很大程度上取决于 EMD 分解的质量。本文针对 EMD 方法在噪声干扰下容易导致模态混叠的现象,提出一种采用 B 样条最小二乘拟合的预处理方法。与

现有方法的分析对比结果表明:SAEMD 能够抑制异常点对信号的影响,从而有效地抑制噪声导致的模态混叠。在后续研究中,对该方法的原理进行理论研究和抑制间断引起的模态混叠值得进一步深入研究的内容。

参考文献

- [1] Huang N E, Shen Z, Long S R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis[J]. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1998, 454 (1971): 903-995.
- [2] Lei Y, Lin J, He Z, et al. A review on empirical mode decomposition in fault diagnosis of rotating machinery [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013, 35(1): 108-126.
- [3] Pei S C, Hsiao Y Z, Tzeng M, et al. Uneven illumination removal and image enhancement using empirical mode decomposition[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2013, 22(4): 043037-043037.
- [4] Li F, Hu D, Ding C, et al. InSAR Phase Noise Reduction Based on Empirical Mode Decomposition[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2013, 10(5): 1180-1184.
- [5] He D, Li R, Zhu J. Plastic bearing fault diagnosis based on a two-step data mining approach[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, 60(8): 3429-3440.
- [6] 刘通, 徐政五, 吴元杰. 太赫兹频段下基于 EMD 的人体生命特征检测[J]. *信号处理*, 2013, 29(12): 1650-1659.
Liu T, Xu Z W, Wu Y J. Human life feature detection based on EMD method in THz band[J]. *Journal of Signal Processing*, 2013, 29(12): 1650-1659. (in Chinese)
- [7] Huang N E, Shen Z, Long S R. A new view of nonlinear water waves: The Hilbert Spectrum 1 [J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1999, 31(1): 417-457.
- [8] Wu Z, Huang N E. Ensemble empirical mode decomposition: a noise-assisted data analysis method [J]. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 2009, 1(01): 1-41.
- [9] Mandic D, Rehman N, Wu Z, et al. Empirical mode de-

composition-based time-frequency analysis of multivariate signals: the power of adaptive data analysis [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2013, 30(6): 74-86.

- [10] Mandic D P. Filter bank property of multivariate empirical mode decomposition[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(5): 2421-2426.
- [11] Hu X, Peng S, Hwang W L. EMD revisited: a new understanding of the envelope and resolving the mode-mixing problem in AM-FM signals [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(3): 1075-1086.
- [12] Chen Q, Huang N, Riemenschneider S, et al. A B-spline approach for empirical mode decompositions [J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2006, 24(1-4): 171-195.
- [13] Yang Y, Miao C, Deng J. An Analytical Expression for Empirical Mode Decomposition Based on B-Spline Interpolation[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2013, 32(6): 2899-2914.
- [14] Unser M, Aldroubi A, Eden M. B-spline signal processing. I. Theory[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(2): 821-833.

作者简介



黎 恒 男,1982 年生,西安电子科技大学博士研究生。研究方向为时频信号处理。

E-mail: wudaomana@gmail.com



李 智 男,1965 年生,教授,西安电子科技大学博士生导师,桂林航天工业学院教授,研究方向为智能仪器、测试理论与技术。

E-mail: cclizhi@guat.edu.cn



莫 玮 男,1956 年生,教授,现为西安电子科技大学博士生导师,工信部综合规划司司长,研究方向为智能化仪器、信息处理与计算机网络。

E-mail: wmo@miit.gov.cn

张绍荣 男,1987 年生,硕士,现为桂林航天工业学院讲师,研究方向为智能仪器、测试理论与技术。

E-mail: zsrong@guat.edu.cn