

阵元切换时间对单通道阵列测向性能的影响

张 珂 马 鹏 张剑云

(电子工程学院 305 教研室, 安徽 合肥 230037)

摘 要: 单通道阵列采用单个通道贯续接入各阵元进行采样, 与常规阵列相比, 单通道阵列减少了硬件成本以及通道幅相特性不一致问题对估计性能的影响, 但现有研究均未考虑单通道阵列的阵元切换时间对系统性能的影响。为填补这一空白, 首先参照常规阵列, 明确了单通道阵列中窄带信号的带宽限制及其与单通道阵列阵元切换时间的关系; 再以单通道阵列 MUSIC 算法为例, 同时考虑信号带宽与单通道阵列阵元切换时间对单通道阵列协方差阵特性的影响, 从理论上推导了单通道阵列 MUSIC 算法关于扩展相对带宽的一阶估计误差。最后对单通道阵列 MUSIC 算法与单通道阵列空间 FFT 算法在不同阵元切换时间下进行仿真, 对两种算法测向误差与阵元切换时间的关系进行分析, 验证了理论推导结果的正确性。

关键词: 单通道阵列; 阵元切换时间; 窄带信号; DOA 估计

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0530(2012)08-1180-07

Effects of Switch Interval on Direction Finding in Switch Antenna Array

ZHANG Ke MA Peng ZHANG Jian-yun

(Electronic Engineering Institute Lab305, Anhui Province, Hefei 230037, China)

Abstract: Compared to the conventional array, Each element of the switch antenna array is sampled by a single channel consequently, which not only reduces the hardware cost but also lowers the effects of the differences in gain and phase between the receiving channels on estimation. However, the present researches on the switch antenna array do not take the effects of the switch antenna array's switch interval on direction finding into consideration. For supplying this gap, at first, referring to the conventional array, the band limit of narrowband signal in the switch antenna array is defined, the relationship between the band limit of narrowband signal and the switch interval is proposed also. Then, by citing the MUSIC algorithm in switch antenna array, both signal band and switch interval are taken into account and the MUSIC algorithm in switch antenna array's first-order estimation error is deduced theoretically. Finally, the MUSIC algorithm and the spatial FFT algorithm in switch antenna array are simulated with different switch interval. The relationship between the two algorithms' direction finding error and their switch interval is analyzed. The simulation demonstrates the result of theoretical analysis.

Key words: switch antenna array; switch interval; narrowband signal; DOA estimation

1 引言

单通道阵列有多个阵元但仅有一个通道。从系统本身是否含有辐射源这个角度可将现有单通道阵列分为无源单通道阵列与有源单通道阵列两大类^[1]。无源

单通道阵列自身不发射信号,利用目标自身辐射的信号对其进行参数估计;有源单通道阵列中则包含了发射单元,通过向空间主动发射信号的方式进行工作。

按照系统结构与工作原理的不同可将无源单通道阵列区分为加权网络无源单通道阵列^{[2]-[4]}与贯续采

样无源单通道阵列^{[5]-[7]}两大类。前者的主要工作原理为:通过加权网络将各阵元的输出信号进行加权求和,由单个接收机得到阵列的总响应,通过控制各阵元的加权值得出一系列的平均功率值,并以此为基础,对阵列的协方差阵进行恢复,再基于协方差阵实现测向;后者的主要工作原理为:通过控制切换开关,使单接收机依次联通各阵元进行采样,再由信号处理模块对贯续采样的信号进行处理,得出参数估计。本文的研究对象是贯续采样无源单通道阵列,下文简称为单通道阵列。

单通道阵列最突出的特点是采用单个通道贯续接入各阵元进行采样,减少了硬件成本与通道幅相特性不一致问题对估计性能的影响,但对于接收通道、接收机以及切换开关的性能指标却提出了较高的要求。文献[8]与文献[9]从硬件实现的角度对单通道阵列主要元件的性能与设计的要求进行了分析与实验,对天线阵列误差、阵元切换器的开关时间误差、单通道接收机的有限带宽、相位特性等因素引入的模型误差进行了研究,并提出了相应的校正方法。但现有文献均未对非零带宽信号与系统性能之间的联系做出研究。

具体来说,由于单通道阵列接收信号时采用接收通道贯续接入各阵元的方式进行,各阵元接受的信号间有一定时延,只要信号具有一定的带宽,在时延内其包络都会发生变化,如果带宽较大或是时延较大导致信号采样过程中包络变化达到一定程度,窄带信号模型就不再适用。此时如果只是参照常规阵列信号处理的模型,在进行理论推导时简单假设信号源辐射的是远场窄带信号,或是以零带宽信号进行仿真实验以检验系统性能,不考虑阵元切换时间对系统性能的影响,就不能切合实际,更不能消除人们对单通道阵列的疑虑。这其中的关键因素是单通道阵列的阵元切换时间与窄带信号模型适用的条件,因此需对这两者的关系做进一步研究。

本文重点对单通道阵列中窄带信号的带宽限制进行分析,给出单通道阵列所能处理的信号带宽及其与阵元切换时间的关系;在此基础上以文献[6]算法为例,对阵元切换时间对 DOA 估计误差的影响做进一步分析。

2 窄带信号及带宽分析

常规阵列通常是针对窄带信号进行参数估计的。

以均匀线阵为例,其对应的窄带信号带宽 B_0 需满足下式:

$$\frac{(L-1)d}{c} \ll \frac{1}{B_0} \quad (1)$$

其中 L 为阵元数, d 为阵元间距, c 为电磁波传播速度。其物理意义是:信号掠过阵列孔径的最大传播时间内,其包络没有发生明显的变化。在式(1)成立的前提下,可将信号近似视为零带宽信号,用相位延迟信号近似阵列接收信号。

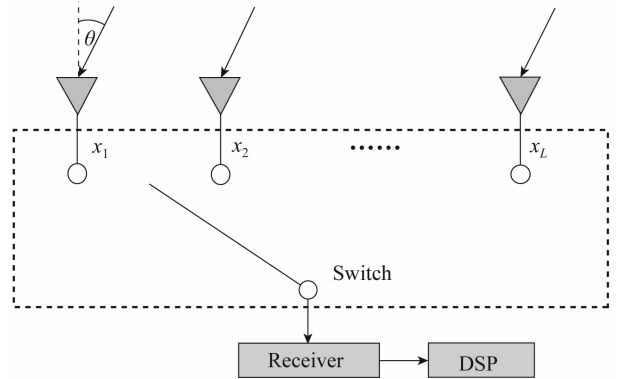


图 1 单通道阵列系统结构

Fig. 1 Switch antenna array system structure

常规阵列中每个阵元都对应一个通道,而单通道阵列中只有一个通道轮流接入各阵元,因此在某一时刻只有一个阵元的信号被接收。如图 1 所示,信号入射至单通道均匀线阵上,且在观测时间内信号参数不变,阵元间距为 d ,阵元切换时间为 τ_0 ,接收通道轮流接入各阵元进行采样。在此定义所有阵元按 1 ~ L 的顺序各被采样一次称为一次轮巡。

若阵元 1 是在 $t=t_0$ 时刻被采样的,则阵元 l 的被采样时刻为 $t=t_0+(l-1)\tau_0$,因此在一次轮巡中,从阵元 1 开始采样到阵元 L 采样结束所需时长为 $(L-1)\tau_0$,由于阵列前端同为均匀线阵结构,同一信号从阵元 1 传播到阵元 L 最多仍需要 $(L-1)d/c$ 时长,对于单通道均匀线阵,一次轮巡中阵列内阵元 1 与阵元 L 接收同一信号可能存在的最大时延将包括上述两段时长,即:一次轮巡中单通道均匀线阵内两阵元接收同一信号可能存在的最大时延为:

$$T_0 = \frac{(L-1)d}{c} + (L-1)\tau_0 \quad (2)$$

若要继续用相位延迟信号近似阵列接收信号,单通道阵列对应的窄带信号带宽 B_1 不仅需要满足式

(1),还要考虑整个 T_0 时长内信号包络的变化,即:从第一个阵元开始采样到最后一个阵元采样完毕这一时长内信号包络没有发生明显的变化,用公式可表示为:

$$\frac{(L-1)d}{c} + (L-1)\tau_0 \ll \frac{1}{B_1} \quad (3)$$

由上式可得:当 B_1 确定时, τ_0 需满足下式:

$$\tau_0 \ll \frac{1}{B_1(L-1)} - \frac{d}{c} \quad (4)$$

式(3)与式(4)也是单通道阵列窄带信号模型以及相应的参数估计算法^{[6][7]}能够应用的前提。

为进一步分析阵元切换时间对单通道阵列所能处理信号带宽的影响,进行如下推导:

对于阵元数为 L ,阵元间距为 d 的常规均匀线阵,假设其能处理的窄带信号最大带宽 B_0 满足下式:

$$\frac{(L-1)d}{c} = \frac{\mu_0}{B_0} \quad (5)$$

其中 μ_0 为一常数,是式(1)中“远小于”的具体体现。如果采用同样阵列前端的单通道阵列,阵元切换时间为 τ_0 ,根据上式可得:

$$\frac{(L-1)d}{c} + (L-1)\tau_0 = \frac{\mu_0}{B_0} \cdot \frac{d/c + \tau_0}{d/c} \quad (6)$$

令:

$$B_1 = B_0 \cdot \frac{d/c}{d/c + \tau_0} = B_0 \cdot \frac{d}{d + c\tau_0} \quad (7)$$

将上式带入式(6)可得:

$$\frac{(L-1)d}{c} + (L-1)\tau_0 = \frac{\mu_0}{B_1} \quad (8)$$

由上式可得:单通道均匀线阵能处理的信号最大带宽为 B_1 ,而式(7)反映了同等条件下常规阵列与单通道阵列所能处理的信号最大带宽之间的关系,当 $B_0 \neq 0$ 时,随着 τ_0 的增大 B_1 将减小,当 τ_0 趋近于 0 时, B_1 与 B_0 将趋近于一致,这意味着当 τ_0 足够小时,单通道阵列能够处理的窄带信号最大带宽将逼近常规阵列。随着电子技术的发展,当今电子开关的切换时间已达到了飞秒量级^{[8][9]},这也为单通道阵列的可行性奠定了基础。

当 $B_0 = 0$ 时,即信源为零带宽信号时,无论 τ_0 取值如何,都恒有 $B_1 = B_0$,这说明:对于零带宽信号,单通道阵列具有与常规阵列相同的处理能力,这种情况下无论两个阵元接收信号的时延有多大都可以用相位的延时去表示。

3 阵元切换时间对测向性能的影响

对于常规阵列,以 MUSIC 算法为代表的 DOA 估计算法的核心步骤是将阵列协方差阵分解为信号子空间及与其相正交的噪声子空间。这种分解来源于信号的零带宽假设,当信号带宽 B 不为零时,信号子空间的低秩结构会被破坏^[10],相应地,DOA 估计的统计特性,特别是 DOA 估计误差将受到影响。

如上节所述,相比常规阵列,无源单通道阵列阵元切换时间 τ_0 的存在增大了一次轮巡中阵列内两阵元接收同一信号可能存在的最大时延 T_0 。在零带宽假设下, τ_0 的存在不会影响原有算法的性能;而当带宽不为零时, τ_0 的存在会对 DOA 估计误差造成影响。本节将以无源单通道阵列 MUSIC 算法^[6]为例,分析 τ_0 对角度估计误差的影响。

假定 K 个载频均为 f_0 的信号 $\{s_k(t)\}_{k=1}^K$ 入射到具有 L 个阵元的单通道均匀线阵上,阵元切换时间为 τ_0 。假定信号为互不相关的平稳随机过程,且具有对称的功率谱密度 $S_k(f)$,频谱中心位于载频 f_0 处,信号 k 的相对带宽为 β_k ,即 $f_{\max} = f_0 + \beta_k \cdot f_0 / 2$, $f_{\min} = f_0 - \beta_k \cdot f_0 / 2$ 。

定义信号 k 的总功率 q_k 为:

$$q_k = \int_{-\infty}^{+\infty} S_k(f) df \quad (9)$$

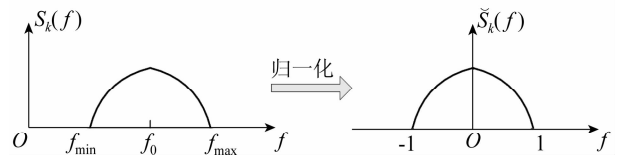


图2 信号源功率谱密度

Fig. 2 The power spectrum of signal source

按照图 3-8 所示的关系对 $S_k(f)$ 进行归一化处理,得到归一化的功率谱密度 $\check{S}_k(f)$,两者的关系为:

$$S_k(f) = q_k \frac{2}{\beta_k f_0} \check{S}_k\left(\frac{f-f_0}{\beta_k f_0 / 2}\right) \quad (10)$$

若 $S_k(f)$ 对应的自相关函数为 $R_k(\tau)$, $\check{S}_k(f)$ 对应的归一化自相关函数为 $\check{R}_k(\tau)$,则对上式等号两边进行傅里叶逆变换可得 $R_k(\tau)$ 与 $\check{R}_k(\tau)$ 的关系为:

$$R_k(\tau) = q_k \exp(j2\pi f_0 \tau) \check{R}_k(\tau \beta_k f_0 / 2) \quad (11)$$

设定阵元 1 被的采样时刻为 $t = t_0$,则根据文献[6]与[7],阵元 μ 的接收信号为:

$$x_{\mu}[t_0 + (\mu - 1)\tau_0] = \sum_{k=1}^K s_k [t_0 + (\mu - 1)\tau_0 + \tilde{\tau}_{\mu k}] + n_{\mu}[t_0 + (\mu - 1)\tau_0] \quad (12)$$

$$\tilde{\tau}_{\mu k} = \frac{(\mu - 1)d \sin \theta_k}{c} \quad (13)$$

其中 $\tilde{\tau}_{\mu k}$ 为信号 k 到达阵元 μ 时相对参考阵元的时延。此时阵列协方差阵中的第 (μ, ν) 个元素为:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}(\mu, \nu) &= E\{x_{\mu}[t_0 + (\mu - 1)\tau_0] x_{\nu}^H[t_0 + (\nu - 1)\tau_0]\} \\ &= \sum_{k=1}^K R_k [(\mu - \nu)\tau_0 + (\tilde{\tau}_{\mu k} - \tilde{\tau}_{\nu k})] + \sigma^2 \delta_{\mu, \nu} \end{aligned} \quad (14)$$

其中 σ^2 为噪声方差。根据式 (11) 可将上式进一步写为:

$$\hat{\mathbf{R}}(\mu, \nu) = \sum_{k=1}^K q_k \exp(j2\pi f_0 T_{\mu\nu}) \tilde{R}_k T_{\mu\nu} \beta_k f_0 / 2 + \sigma^2 \delta_{\mu, \nu} \quad (15)$$

其中 $T_{\mu\nu} = (\mu - \nu)\tau_0 + \tilde{\tau}_{\mu k} - \tilde{\tau}_{\nu k}$ 。

令 $a_{\mu}(\theta_k) = \exp\{j2\pi f_0 [(\mu - 1)\tau_0 + \tilde{\tau}_{\mu k}]\}$, 上式可改写为:

$$\hat{\mathbf{R}}(\mu, \nu) = \sum_{k=1}^K a_{\mu}(\theta_k) q_k a_{\nu}^H(\theta_k) \tilde{R}_k T_{\mu\nu} \beta_k f_0 / 2 + \sigma^2 \delta_{\mu, \nu} \quad (16)$$

上式可写成如下矩阵形式:

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{k=1}^K [q_k \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) \odot \mathbf{B}_k] + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (17)$$

其中“ \odot ”为 Hadamard 积,且有:

$$\mathbf{a}(\theta_k) = [a_1(\theta_k) \quad a_2(\theta_k) \quad \cdots \quad a_L(\theta_k)]^T \quad (18)$$

对于式 (17) 中的矩阵 $\{\mathbf{B}_k\}_{k=1}^K$, 其第 (μ, ν) 个元素为:

$$\mathbf{B}_k(\mu, \nu) = \tilde{R}_k \{[(\mu - \nu)\tau_0 + (\tilde{\tau}_{\mu k} - \tilde{\tau}_{\nu k})] \beta_k f_0 / 2\} \quad (19)$$

由上述分析可得:信号带宽以及阵元切换时间的影响仅仅体现在 \mathbf{B}_k 中。

对于零带宽信号,即 $\beta_k = 0$,若 t_0 时刻的接收数据矢量为 $\mathbf{x}(t_0)$,则阵列协方差阵 \mathbf{R} 为:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t_0) \mathbf{x}^H(t_0)] = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H(\theta) + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (20)$$

其中:

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_K \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(\theta_K)] \quad (22)$$

由上述推导过程可得:当 $\beta_k = 0$ 时,矩阵 $\{\mathbf{B}_k\}_{k=1}^K$ 中的所有元素均为 1, τ_0 的取值对 \mathbf{B}_k 也没有影响,此时 $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ 。

为便于推导,将式 (13) 带入式 (19), 可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k(\mu, \nu) &= \tilde{R}_k [(\mu - \nu) (\tau_0 + \frac{d \sin \theta_k}{c}) \beta_k f_0 / 2] \\ &= \tilde{R}_k [(\mu - \nu) \frac{d \sin \theta_k}{c} \beta_k (1 + \frac{\tau_0 c}{d \sin \theta_k}) f_0 / 2] \end{aligned} \quad (23)$$

为综合考虑信号带宽与阵元切换时间的影响,在此定义 $\hat{\beta}_k$ 为信号 k 在单通道阵列中的扩展相对带宽:

$$\hat{\beta}_k = \beta_k (1 + \frac{\tau_0 c}{d \sin \theta_k}) \quad (24)$$

并令:

$$\Gamma_{\mu\nu} = \tilde{\tau}_{\mu k} - \tilde{\tau}_{\nu k} = (\mu - \nu) \frac{d \sin \theta_k}{c} \quad (25)$$

至此式 (23) 可写为:

$$\mathbf{B}_k(\mu, \nu) = \tilde{R}_k (\Gamma_{\mu\nu} \hat{\beta}_k f_0 / 2) \quad (26)$$

为进一步分析信号带宽与阵元切换时间对 DOA 估计的影响,将 $\hat{\mathbf{R}}$ 在 \mathbf{R} 处展开为 $\hat{\beta}_k$ 的泰勒级数。由于仅有 \mathbf{B}_k 依赖于 $\hat{\beta}_k$, 只需将 $\tilde{R}_k [\Gamma_{\mu\nu} \hat{\beta}_k f_0 / 2]$ 展开为泰勒级数。

根据上述推导可得关于 $\hat{\mathbf{R}}$ 的偏导为:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{R}}}{\partial \hat{\beta}_k} = \mathbf{a}(\theta_k) q_k \mathbf{a}^H(\theta_k) \odot \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial \hat{\beta}_k} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{R}}}{\partial \hat{\beta}_k \partial \hat{\beta}_l} = \begin{cases} \mathbf{a}(\theta_k) q_k \mathbf{a}^H(\theta_k) \odot \frac{\partial^2 \mathbf{B}_k}{\partial \hat{\beta}_k^2}, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (28)$$

根据上述两式可将 $\hat{\mathbf{R}}$ 二阶展开为:

$$\hat{\mathbf{R}} \approx \mathbf{R} + \sum_{k=1}^K (\hat{\beta}_k \tilde{\mathbf{C}}_k + \hat{\beta}_k^2 \tilde{\mathbf{B}}_k) = \mathbf{R} + \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{B}} \quad (29)$$

其中 $\tilde{\mathbf{C}} = \sum_{k=1}^K \hat{\beta}_k \tilde{\mathbf{C}}_k$, $\tilde{\mathbf{B}} = \sum_{k=1}^K \hat{\beta}_k^2 \tilde{\mathbf{B}}_k$; $\tilde{\mathbf{C}}_k$ 与 $\tilde{\mathbf{B}}_k$ 的第 (μ, ν) 个元素分别为:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_k(\mu, \nu) &= a_{\mu}(\theta_k) q_k a_{\nu}^H(\theta_k) \\ &\quad \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_k} \tilde{R}_k (\Gamma_{\mu\nu} \hat{\beta}_k f_0 / 2) \Big|_{\hat{\beta}_k=0} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_k(\mu, \nu) = \frac{1}{2} a_{\mu}(\theta_k) q_k a_{\nu}^H(\theta_k)$$

$$\cdot \left[\frac{\partial^2 \check{R}_k(\Gamma_{\mu\nu} \hat{\beta}_k f_0 / 2)}{\partial \hat{\beta}_k^2} \Big|_{\hat{\beta}_k=0} \right] \quad (31)$$

考虑到 $\check{R}_k(\tau)$ 与 $\check{S}_k(f)$ 互为傅里叶变换对, 且 $\check{S}_k(f)$ 为偶对称, 因此有:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_k} \check{R}_k(\Gamma_{\mu\nu} \hat{\beta}_k f_0 / 2) \Big|_{\hat{\beta}_k=0} = \frac{1}{2} \Gamma_{\mu\nu} f_0 \check{R}'_k(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (32)$$

由上式可得: $\check{C}_k \equiv 0$; 同理可得:

$$\frac{\partial^2 \check{R}_k(\Gamma_{\mu\nu} \hat{\beta}_k f_0 / 2)}{\partial \hat{\beta}_k^2} \Big|_{\hat{\beta}_k=0} = \frac{1}{4} (\Gamma_{\mu\nu} f_0)^2 \check{R}''_k(\tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{4} (\Gamma_{\mu\nu} f_0)^2 \kappa_k \quad (33)$$

$$\kappa_k = \check{R}''_k(0) = -4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \check{S}_k(f) \exp(j2\pi f\tau) df \quad (34)$$

由上述分析可得, 对于具有对称功率谱密度的信源有:

$$\hat{R} \approx R + \check{B} \quad (35)$$

将式(33)代入式(31)可得:

$$\check{B}_k(\mu, \nu) = \frac{1}{8} a_\mu(\theta_k) q_k a_\nu^H(\theta_k) \Gamma_{\mu\nu}^2 f_0^2 \kappa_k \quad (36)$$

在实际应用中, 真实的阵列协方差阵无法得知, 只能通过有限次轮巡获得的接收数据矢量去估计, 即:

$$\begin{aligned} \hat{R} &\approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}(t_n) \mathbf{x}^H(t_n) = R + \sum_{k=1}^K \hat{\beta}_k^2 \check{B}_k + \check{M} \\ &= R + \check{B} + \check{M} \end{aligned} \quad (37)$$

上式中 N 为轮巡次数, t_n 为第 n 次轮巡的起始时间; \check{B}_k

由式(36)给出; \check{M} 是由于采样次数有限对协方差阵所造成的随机扰动 (阶数为 $1/N$)^[10]。

根据阵列模型的二阶统计特性, 对于理想的 R 进行特征分解可得:

$$R = U_S \Lambda_S U_S^H + \sigma^2 U_N U_N^H \quad (38)$$

而对于实际估计得来的 \hat{R} 进行特征分解可得:

$$\hat{R} = \hat{U}_S \hat{\Lambda}_S \hat{U}_S^H + \hat{U}_N \hat{\Lambda}_N \hat{U}_N^H \quad (39)$$

其中 Λ_S 为由 R 的 K 个大特征值组成的对角阵, U_S 为相应的正交特征矢量, U_N 为其余 $L-K$ 个正交特征矢量。 $\hat{U}_S, \hat{U}_N, \hat{\Lambda}_S, \hat{\Lambda}_N$ 分别为 $U_S, U_N, \Lambda_S, \sigma^2 I_{L-K}$ 的估计值。显然, 当 $\hat{\beta}_k=0$ 且 $N \rightarrow \infty$ 时, 上述四个估计值与各自的理想值趋于一致, 且有 $\hat{R} = R$ 。

定义 $\hat{\Lambda}_S = \Lambda_S - \sigma^2 I_K$; 令 $P_G = G(G^H G)^{-1} G^H = GG^+$ 为

投影到 G 的列空间的投影矩阵; $P_G^\perp = I - G(G^H G)^{-1} G^H$ 为投影到 G 的列空间的正交补空间的投影矩阵, 其中 $G^+ = (G^H G)^{-1} G^H$ 为 G 的伪逆。为简化记号, 用 \mathbf{a}_k 代替 $\mathbf{a}(\theta_k)$, 以 \mathbf{d}_k 代替 $\frac{d\mathbf{a}(\theta_k)}{d\theta_k}$ 。

MUSIC 算法的另一种形式是计算下列标量函数的 K 个最小的极值点所对应的角度作为各信源 DOA 估计值 $\hat{\theta}_k$:

$$\hat{V}(\theta) = \text{tr}[P_{\mathbf{a}(\theta)}^\perp \hat{U}_N \hat{U}_N^H] \quad (40)$$

由于估计值 $\hat{\theta}_k$ 极值点, 故 $\hat{V}(\theta)$ 在 $\theta = \hat{\theta}_k$ 处的一阶导数 $\hat{V}'(\hat{\theta}_k) = \frac{d\hat{V}(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_k} = 0$, 将 $\hat{V}'(\hat{\theta}_k)$ 在真实值 θ_k 处展开可得:

$$\hat{V}'(\hat{\theta}_k) = \hat{V}'(\theta_k) + (\hat{\theta}_k - \theta_k) \hat{V}''(\theta_k) = 0 \quad (41)$$

其中: $\hat{V}''(\hat{\theta}_k) = \frac{d^2 \hat{V}(\theta)}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_k}$ 。可将上式进一步写为:

$$\hat{\theta}_k - \theta_k = -[\hat{V}''(\theta_k)]^{-1} \hat{V}'(\theta_k) \quad (42)$$

根据文献[10]可得:

$$\hat{V}'(\hat{\theta}_k) = 2\text{Re} \left[(\mathbf{a}_k^H \mathbf{a}_k)^{-1} \mathbf{a}_k^H U_S \Lambda_S^{-1} U_S^H (\check{B} + \check{M}) U_N U_N^H \mathbf{d}_k \right] \quad (43)$$

$$\hat{V}''(\theta_k) = -2(\mathbf{a}_k^H \mathbf{a}_k)^{-1} \mathbf{d}_k^H U_N U_N^H \mathbf{d}_k \quad (44)$$

将上述两式代入式(42)中可得无源单通道阵列 MUSIC 算法对于 $\hat{\beta}$ 的一阶理论估计误差为:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k - \theta_k &= \frac{2\text{Re} \left[\mathbf{a}_k^H U_S \Lambda_S^{-1} U_S^H (\check{B} + \check{M}) U_N U_N^H \mathbf{d}_k \right]}{\mathbf{d}_k^H U_N U_N^H \mathbf{d}_k} \\ &\approx \frac{2\text{Re} \left[\mathbf{a}_k^H U_S \Lambda_S^{-1} U_S^H \sum_{k=1}^K \hat{\beta}_k^2 \check{B}_k U_N U_N^H \mathbf{d}_k \right]}{\mathbf{d}_k^H U_N U_N^H \mathbf{d}_k} \end{aligned} \quad (45)$$

由上式可得: 除采样次数有限对协方差阵造成的随机扰动 \check{M} 外, 各信源的 $\hat{\beta}_k$ 将对算法理论估计误差产生影响; 根据式(24), $\hat{\beta}_k$ 由 β_k 与 τ_0 共同决定, 因此算法理论估计误差将受到 β_k 与 τ_0 的共同影响。若忽略 \check{M} 的影响, 仅有当各 $\beta_k=0$ 时算法理论误差才有可能为 0。

4 仿真分析

仿真条件为: 1 个载频 $f_0 = 1.5\text{MHz}$, 带宽 $B = 1\text{KHz}$, 具有对称功率谱密度的远场窄带平稳信号从 $\theta = 30^\circ$ 入

射至位于同一位置的常规均匀线阵与单通道均匀线阵上, SNR=5dB, 两阵列的阵元间距均为载频的半波长, 阵元数均为 16, 单通道阵列的阵元切换时间为 τ_0 , 常规阵列的快拍次数与单通道阵列的轮巡次数均为 50; 对于两种阵列分别采用各自适用的 MUSIC 算法^{[6][11]}与空间 FFT 算法^{[7][12]}进行 DOA 估计, FFT 运算补零后的位数与 MUSIC 运算的谱峰搜索点数均为 2048。

图 3 与图 4 显示了采用不同 τ_0 的单通道阵列 MUSIC 算法估计出的空间谱; 图 5 与图 6 显示了采用不同 τ_0 的单通道阵列空间 FFT 算法估计出的空间谱。上述四图中, $\tau_0=0$ 对应的曲线是常规阵列估计出的空间谱。根据图 3 ~ 图 6 可得: 当 $\tau_0 \leq 1\mu\text{s}$ 时, 单通道阵列两种算法估计出的空间谱与常规阵列极为接近, 谱峰的偏差也较小。对于单通道阵列 MUSIC 算法, 当 τ_0 达到 $50\mu\text{s}$ 以上时, 谱峰产生了明显的偏移, 当 τ_0 达到 $80\mu\text{s}$ 时, 空间谱中出现了伪峰; 对于单通道阵列空间 FFT 算法, 当 τ_0 超过 $10\mu\text{s}$ 时, 谱峰就会出现明显偏移, 同时伴有伪峰出现, 此时的估计结果已经完全不可取。

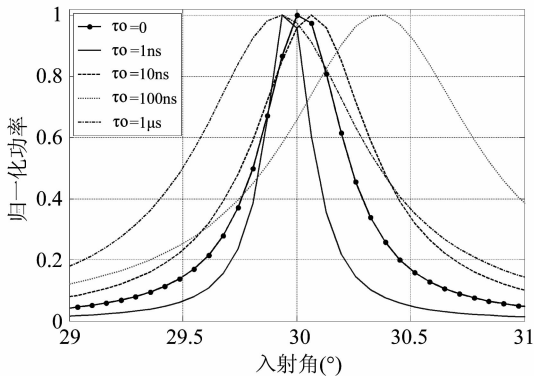


图 3 不同 τ_0 时 MUSIC 算法空间谱图 1

Fig. 3 The first spatial spectrum by MUSIC algorithm with different τ_0

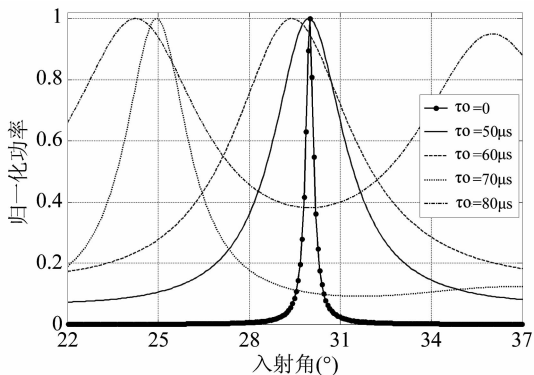


图 4 不同 τ_0 时 MUSIC 算法空间谱图 2

Fig. 4 The second spatial spectrum by MUSIC algorithm with different τ_0

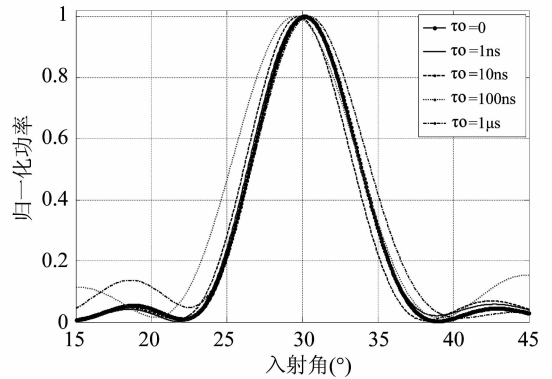


图 5 不同 τ_0 时空间 FFT 算法空间谱图 1

Fig. 5 The first spatial spectrum by spatial FFT algorithm with different τ_0

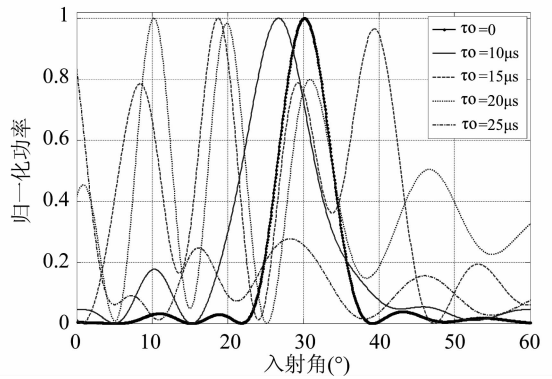


图 6 不同 τ_0 时空间 FFT 算法空间谱图 2

Fig. 6 The second spatial spectrum by spatial FFT algorithm with different τ_0

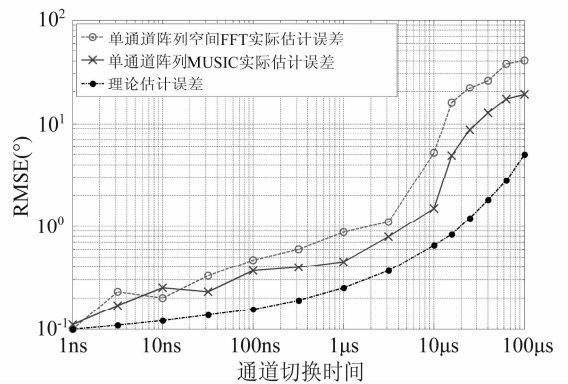


图 7 两种单通道阵列算法的 τ_0 -RMSE 曲线

Fig. 7 The τ_0 -RMSE curves of two algorithms in switch antenna array

根据式(4), 单通道阵列的 τ_0 须满足: $\tau_0 \ll \frac{1}{B(L-1)} - \frac{d}{c}$, 将仿真参数带入其中可得: 在该仿真实验的条件下须满足 $\tau_0 \ll 66.33\mu\text{s}$, 单通道阵列算法方可进行有效

估计。因此这一仿真结果与理论推导结果相符合。

为进一步验证 τ_0 对两种算法估计误差的影响,在上述仿真条件下计算 τ_0 取不同值时两种算法 DOA 估计的均方根误差并根据式(45)计算出理论误差,对每种算法每个 τ_0 值进行 200 次独立的 Monte-Carlo 实验,结果如图 7 所示:当 $\tau_0 \leq 100\text{ns}$ 时,两种算法均有较好的估计精度,而当 $\tau_0 \geq 50\mu\text{s}$ 时,两种算法的误差均迅速增大;相比较而言,空间 FFT 算法的估计误差的变化对于 τ_0 的变化更为敏感。

5 结束语

本文从常规阵列的窄带信号分析入手,提出了单通道阵列中窄带信号的带宽与阵元切换时间的限制以及两者的关系;并以文献[6]算法为例,进一步分析了阵元切换时间对 DOA 估计误差的影响,推导了该算法关于扩展相对带宽的一阶理论估计误差。相比现有文献,本文首次系统分析了阵元切换时间对于单通道阵列测向性能的影响,填补了相关研究的空白,进一步完善了单通道阵列的理论基础。

参考文献

- [1] Lee Moon-Sik, Vladimir Katkovnik, Kim Yong-Hoon. System Modeling and Signal Processing for a Switch Antenna Array Radar [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(6): 1513-1523.
- [2] 叶中付,吴涛. 基于相控阵单通道接收机高分辨 DOA 估计的跟踪算法 [J]. 电子科学学刊, 2000, 22(2): 260-264.
Ye Z F, Wu T. HIGH-RESOLUTION DOA TRACKING ALGORITHM BASED ON PHASED ARRAY WITH A SINGLE CHANNEL RECEIVER [J]. JOURNAL OF ELECTRONICS, 2000, 22(2): 260-264. (in Chinese)
- [3] 叶中付,吴涛. 用单通道接收机实现方位超分辨的一种方法 [J]. 信号处理, 2001, 17(2): 192-194.
Ye Z F, Wu T. A Method for Super-resolution Direction Finding with Single Channel Receiver [J]. Signal Processing, 2001, 17(2): 192-194. (in Chinese)
- [4] 叶中付,王超,徐旭. 单通道接收机协方差矩阵的随机权恢复方法 [J]. 数据采集与处理, 2003, 18(2): 127-131.
Ye Z F, Wang T, Xu X. Random Weight Method for Covariance Matrix Recovery from Single Receiver Output [J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2003, 18(2): 127-131. (in Chinese)
- [5] Qu J Y, Zhang J Y, You Z G. Direction finding based on

single receiving channel [C] // Proceedings of IEEE International Conference on Signal Processing, Beijing: IEEE, 2006: 475-477.

- [6] Hu D X, Li D H, Cui H. A New Approach of High Resolution Direction Finding Using Single Channel Receiver [C] // Proceedings of IEEE International Conference on Image Analysis and Signal Processing, Zhejiang: IEEE, 2010: 513-517.
- [7] Zhang K, Ma P, Zhang J Y. DOA Estimation Algorithm Based on FFT in Switch Antenna Array [C] // Proceedings of 2011 IEEE CIE International Conference on RADAR: Vol 3, Chengdu: IEEE, 2011: 1425-1428.
- [8] 屈金佑. 单通道测向技术研究[D]. 合肥: 电子工程学院, 2006.
Qu J Y. The Research on Direction Finding with a Single Channel [D]. Hefei: Electronic Engineering Institute, 2006. (in Chinese)
- [9] John Joseph Keaveny. Analysis and Implementation of a Novel Single Channel Direction Finding Algorithm on a Software Radio Platform [D]. Virginia: Polytechnic Institute, Virginia State University, 2005.
- [10] Sorelius, J, Moses. R. L, Soderstrom. T, Swindlehurst. A. L. Effects of nonzero bandwidth on direction of arrival estimators in array signal processing [J]. IEE Proceeding-Radar, Sonar and Navigation, 1998, 155(12): 317-324.
- [11] R. O. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Transactions on Antennas Propagation, 1986, 34(3): 276-280.
- [12] Liang T, Kwan H. K. A novel approach to fast DOA estimation of multiple spatial narrowband signals [C] // The 45th Midwest Symposium on Circuits and Systems: Vol 1. Tulsa, Oklahoma: IEEE, 2002: 431-434.

作者简介



张珂(1985-),男,安徽合肥人,电子工程学院硕士研究生,研究方向:阵列信号处理。E-mail: 741589280@qq.com

马鹏(1984-),男,安徽蚌埠人,电子工程学院博士研究生,研究方向:MIMO 雷达信号处理。

张剑云(1963-),男,浙江龙泉人,电子工程学院教授,博士生导师,研究方向:雷达信号处理。