

基于线性规划的分段平滑信号的复原算法

魏雪飞¹ 葛成伟¹ 陆建明² 包亚萍¹

- (1. 南京工业大学 电子与信息工程学院, 江苏 南京, 211816;
2. 中国电子科技集团第三十六研究所, 浙江 嘉兴, 314033)

摘 要: 随着物联网技术的发展, 人们大量地通过传感器获取现实生活及自然界中的信息, 但由于种种原因, 传输过程中信号会有失真。因此, 要得到反映某物理特性真实原始的信号很困难。从失真的观测信号中恢复原始信号一直是信号处理领域的热点之一, 而信号复原最需要解决的问题是解的不唯一性。基于“总有界变差”思想, 利用分段平滑的性质, 提出带总观测误差约束的信号复原模型。通过引入松弛因子, 将有约束的不可微优化问题转化为有约束的线性规划问题。仿真实验结果表明, 信号复原的效果明显要好于传统的 Wiener 滤波和 Richardson-Lucy 方法。

关键词: 信号复原; 总有界变差; 分段平滑; 线性规划

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0530(2012)08-1200-07

Sectionally smooth signal recovery based on linear programming algorithm

WEI Xue-fei¹ GE Cheng-wei¹ LU Jian-ming² BAO Ya-ping¹

- (1. College of Electronics and Information, Nanjing University of Technology, Nanjing Jiangsu 211816, China;
2. No. 36 Inst. of China Electronic Technology Corp., Jiaxing Zhejiang 314033, China)

Abstract: With the development of Internet of Things, information from the real life or the nature is largely got through the sensors, but for various reasons, which will lead to the distortion of the signal when transmitted. Therefore, it is very difficult to reflect the physical characteristics of an original signal. Signal recovery from the distorted original signals is always one of the hot spots of the signal processing domain, however, the problem of solution's non-uniqueness is still the most pressing issue to signal recovery. By using the sectionally smooth's property and relaxation factor, this paper puts forward a signal recovery model with observation error constraints based on the idea of "total bounded variation". With the proposed model, optimization process of non-differentiable constrained problem can be transformed into a nonlinear programming problem with constraints. The simulation results demonstrate that the effect of the signal recovery is clearly better than the traditional Wiener filter and Richardson-Lucy method.

Key words: signal recovery; total bounded variation; sectional smooth; linear programming

1 引言

传感器检测到的往往是多个成分(包括噪声、无用的信号)混合在一起的信号,同时传输的通道复杂未知,尽管使用了高性能的传感器,但是获得的信号质量并不好。因此,要得到反映某物理特性的原始信号很

困难。而反卷积就是从观测到的混合信号中恢复出原始信号的一种信号处理方法。反卷积方法在通信、雷达、语音、生物医学等领域中具有多方面的应用。

国内外相关研究机构对反卷积和复原技术研究较多。最著名的 Wiener 滤波至今仍然是信号复原的常用技术, Wiener 滤波的出发点在于使复原前后的信号

均方误差最小化。后来邹谋炎^[1]等人在此基础上,又提出了增量 Wiener 滤波算法,这种算法允许对解进行迭代估计。然而, Wiener 滤波通常要求系统是线性移不变,且信号和噪声都要求是广义平稳的,而实际所遇到的信号大多数是非平稳的,或至少在观测的全部时间内不是平稳的;此外,为了抑制噪声, Wiener 滤波给出的信号估计常常显得过分平滑,这些因素都将会降低信号的复原效果。

Richardson-Lucy^[2]反卷积算法在信号复原中也被广泛应用,该算法在噪声影响可以忽略或较小的情况下具有唯一解,但是在噪声对观测信号造成影响,尤其在低信噪比情况下,重建的信号效果较差,后来国内外学者又提出了改进的 Lucy-Richardson 算法^[3-4],但是对纹波的消除效果仍不是很明显。

目前研究比较成功的是 Chan 等人^[5-7]的变差复原算法。这种算法利用偏微分梯度投影法规定拉格朗日乘子项使变差最小化,具有收敛快、迭代稳定等优点,尤其适合于边沿陡峭信号的复原。文献^[6]研究提出基于规则化的动态自适应算法来选择变差的参数。文献^[7]提出了一种基于变差和受约束的变分模型。在此基础上,本文提出分段平滑信号复原的总有界变差模型,并将此模型转换为等价的线性规划问题,很好地复原了原始信号。

2 信号失真模型

在实际情况下,观测到的失真信号往往是完全卷积的一部分样本,这称为部分卷积。给定原始离散信号序列 $f(n), n=1, 2, \dots, N$ 以及核函数 $h(n), n=1, 2, \dots, M$, 假定 $N \gg M$, 则 $f(n)$ 与 $h(n)$ 的部分离散卷积可

以写成

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{k=1}^M h(k)f(n+M-k-1) \\ &= \sum_{k=1}^N f(k)h(n+M-k-1) \\ &\quad (n=1, 2, \dots, L) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $L=N-M+1$ 。通常,信号的失真可以用如下卷积模型来描述

$$g=f^*h+\eta \quad (2)$$

其中, $*$ 表示部分卷积算子, η 为随机噪声(一般假定均值为 0, 方差为 σ^2 的高斯白噪声)。为方便分析计算,常将离散卷积公式写成向量形式,记

$$f=[f_1, f_2, \dots, f_N]^T \quad (3)$$

$$g=[g_1, g_2, \dots, g_L]^T \quad (4)$$

$$\eta=[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_L]^T \quad (5)$$

则部分卷积公式可以写成

$$g=Hf+\eta \quad (6)$$

H 为部分卷积核矩阵。

信号复原最基本的任务就是抑制信号被模糊的同时,不丢失原始信号的细节信息。然而,抑制模糊和保持细节往往是矛盾的,这也是至今信号复原领域中尚未能很好解决的一个问题。

3 总有界变差方法

通常传感器采集到的信号因外界干扰而呈现出非平稳性,如振动信号、语音信号、脑电图的一维切片信号等。如图 1 所示,这种信号可以通过分段平滑信号来近似。在平滑段内,信号的统计特性,如概率分布、相关函数和功率频谱密度,保持不变,且具有一定的平稳性;在平滑段之间存在明显的跃变点。

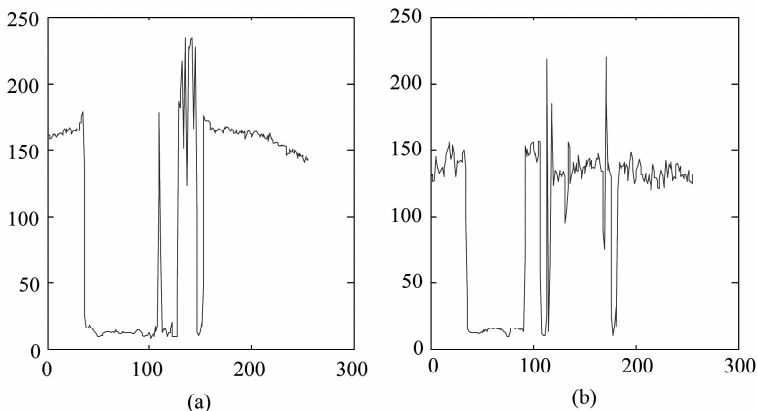


图 1 非平稳信号示意图

Fig. 1 Schematic diagram of non-stationary signals

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I_L & -I_L \\ 0 & 0 & 0 & -I_L & I_L \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$B = [HD^\dagger \quad -HD^\dagger \quad HN(D) \quad -I_L \quad I_L] \quad (27)$$

$$b = [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]^T, d = g \quad (28)$$

由于松弛因子的引入,转换后的线性规划的规模比原模型大三倍左右,如式(23)所示。为快速有效求解式(23),这里采用内点法^[8]。对于大规模有约束的线性规划问题,内点法利用稀疏矩阵的功能,将迭代的方向投影在边界上,沿着这个方向优化目标函数值,具有高效、迭代稳定等优点。

由此,根据式(19)就可以得到分段平滑信号的估计 \hat{f} 。

4 仿真实验

为验证算法的有效性,以信号传输中最常见的阶跃信号为例,观测信号由式(2)产生,使用符合高斯分布的函数作为核函数 $h(n)$ 。在添加不同信噪比 (SNR) 的噪声情况下,使用 Wiener 滤波算法、Richardson-Lucy 方法与本文算法对上述混合信号进行恢复,对比结果如图 2 所示。

图 2(a)、(b)、(c) 显示了固定参数 $\mu=1$, 并设定信噪比 SNR 为 10dB、30dB、 ∞ 时,不同算法对分段平滑信号的复原效果的对比。从图中可以明显看出,在信噪比相同的条件下,本文的算法要好于前两者,在信号的平滑段内最大程度地保证了信号的平滑性。不仅如此,即使在低信噪比的条件下,复原信号的跃变点位置也清晰可见,边沿陡峭。这一点对于传感器信号传输过程至关重要,跃变点往往能反映信号的潜在信息;在高信噪比条件下,观测信号几乎可以复原为原始信号。

为了进一步说明信号的复原效果,采用信号复原质量的评价标准模型中的均方误差 (MSE) 公式对上述结果进行定量评价:

$$MSE = \sqrt{\sum_{i=1}^N (f_i - \hat{f}_i)^2} / N \quad (29)$$

计算原始信号与复原信号的 MSE,结果如表 1 及图 3 所示。

表 1 中的 MSE 数据也说明了本文算法的复原效果要好于前两者。同时随着信噪比的增加,复原前后的 MSE 将越来越小。

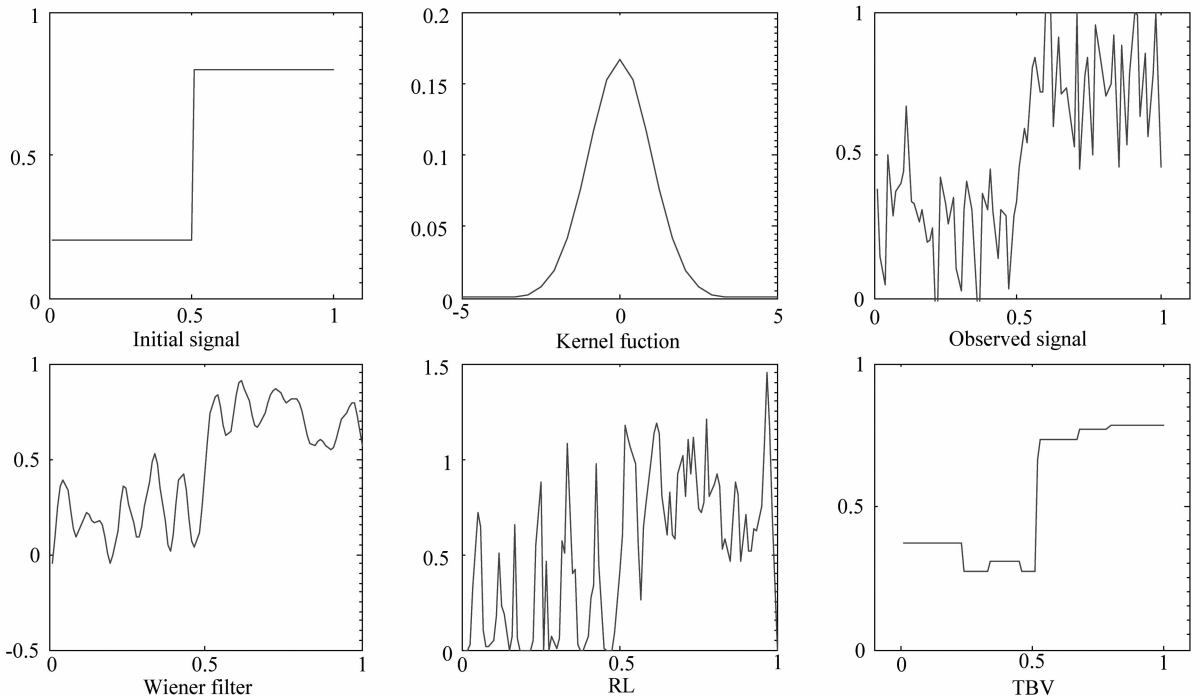
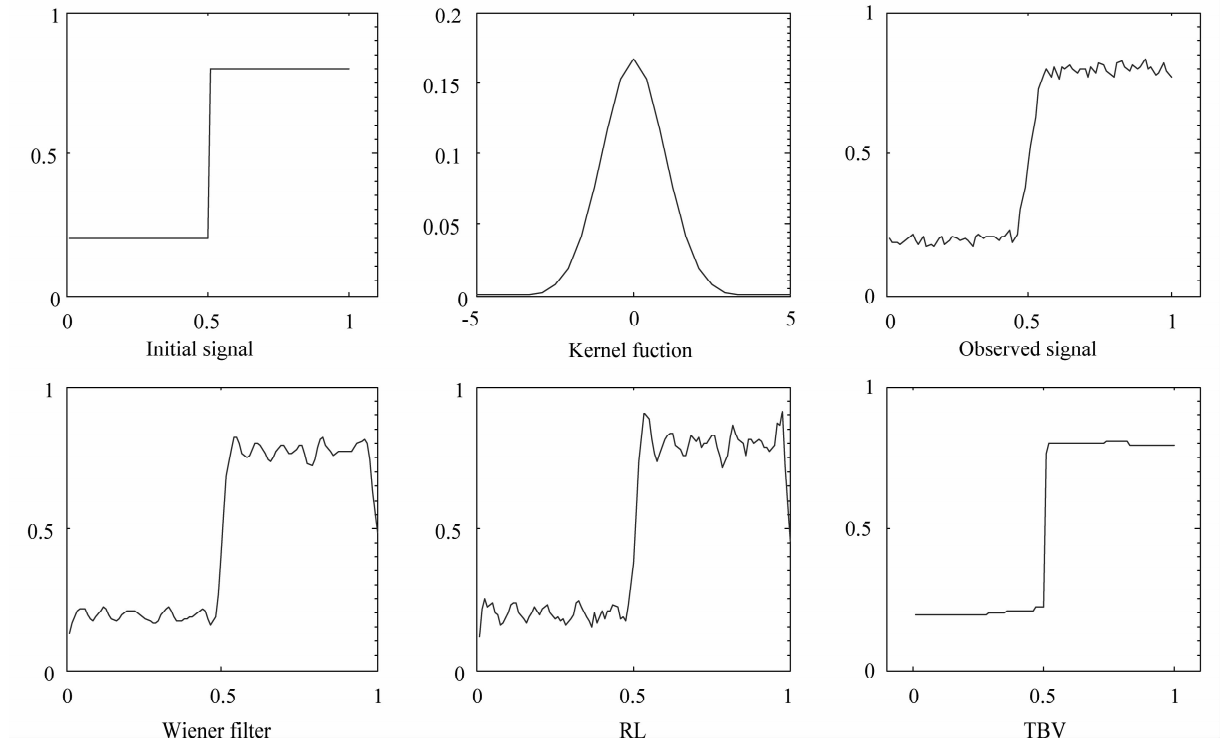
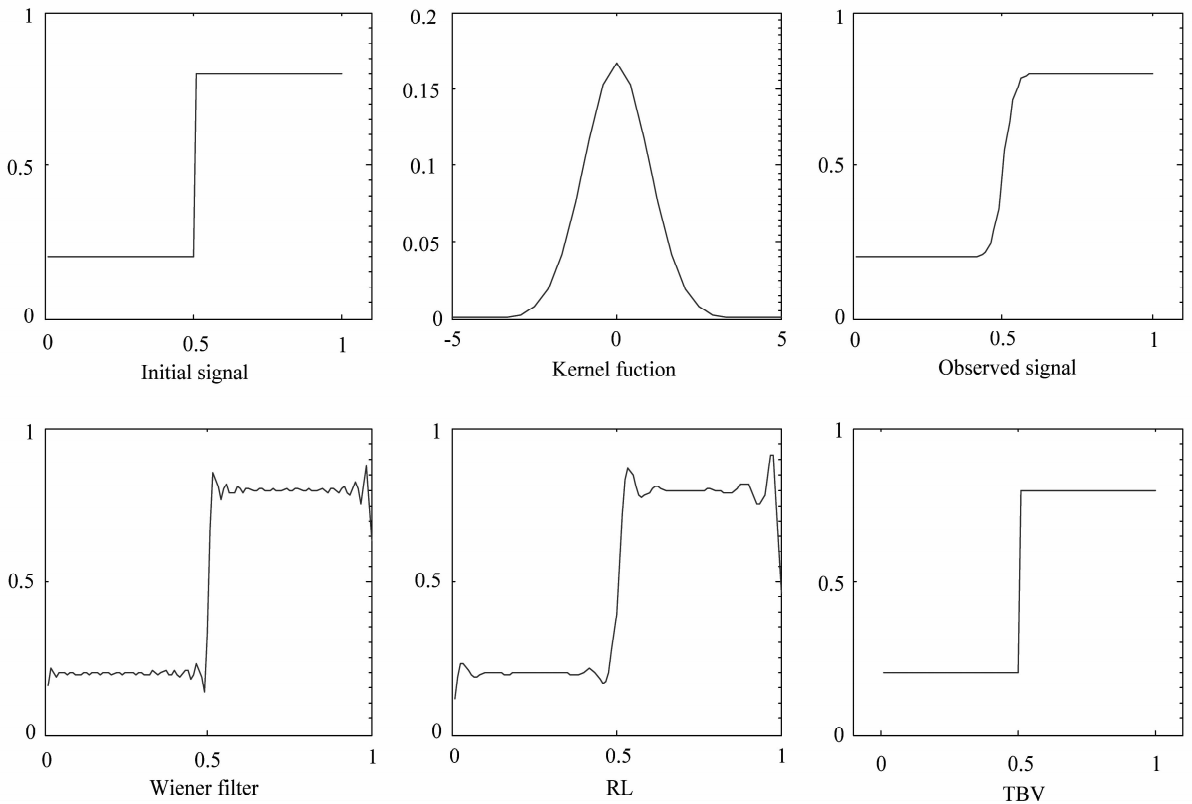


图 2(a) 信号复原对比图, SNR=10dB, TVB 参数 $\mu=1$

Fig. 2(a) Comparison diagram of signal recovery, SNR=10dB, TVB parameter $\mu=1$

图2(b) 信号复原对比图, $SNR=30\text{dB}$, TVB 参数 $\mu=1$ Fig. 2 (b) Comparison diagram of signal recovery, $SNR=30\text{dB}$, TVB parameter $\mu=1$ 图2(c) 信号复原对比图, $SNR=\infty$, TVB 参数 $\mu=1$ Fig. 2 (c) Comparison diagram of signal recovery, $SNR=\infty$, TVB parameter $\mu=1$

TBV 模型中的参数 ε 、 μ 是影响信号复原效果的关键因素。式(2)说明了复原信号的随机误差可以理解为融合在观测信号当中的白噪声,由此可知参数 ε 应该满足 $\max |\eta_i| \leq \varepsilon$ 。参数 μ ($\mu > 0$) 对总有界变差项和总观测误差项起到权衡作用。 μ 取值过大则残留较大的噪声,取值过小则模糊不能完全去除。图 3 显示了不同信噪比、不同的参数 μ 条件下得到的 μ -MSE 实验图。可以清晰地看到,几乎每条曲线都是下凸的,即在不同信噪比条件下,存在一个最优的 μ^* 值,使得复原信号和原始信号的 MSE 达到最小。当信噪比较小时,在 $\mu \in (0, \mu^*)$,随着 μ

值的增大,为了使式(9)达到最小,总观测误差项将不断减小,与此同时,总有界变差项则会不断增大;在 $\mu = \mu^*$ 时,得到的 MSE 最小,此时信号复原的效果最好;在 $\mu \in (\mu^*, \infty)$,继续增大 μ 值,此时总观测误差项已经足够小,达到稳定状态,而总有界变差项则会继续增大, MSE 将越来越大,信号的复原效果也越来越差。当信噪比较大时,观测信号中包含的噪声较少,即使 μ 值非常大,得到的总观测误差项也很小,此时复原得到的信号将主要由总有界变差项决定,增大 μ 对复原效果影响不大, MSE 保持不变。

表 1 复原信号与原始信号的 MSE(不同的算法)

Tab. 1 MSE of the recovery and original signals (for different algorithms)

| Algorithm($\mu=1$) | SNR=1dB | SNR=5dB | SNR=10dB | SNR=30dB | SNR= ∞ |
|----------------------|----------|-----------|-----------|------------|---------------|
| Wiener filtering | 0.284095 | 0.171571 | 0.124119 | 0.0558268 | 0.0289223 |
| Richardson-Lucy | 0.659042 | 0.399969 | 0.269647 | 0.0592330 | 0.0526228 |
| TBV | 0.104429 | 0.0846292 | 0.0592354 | 0.00422424 | 1.48778e-012 |

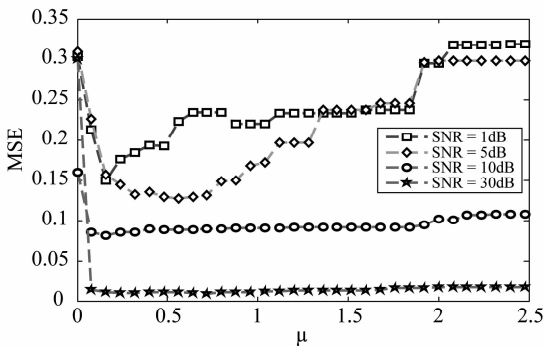


图 3 参数 μ 和信噪比对复原效果的影响

Fig. 3 Effect of μ and SNR to signal recovery

5 结论

本文针对分段平滑信号的局部平滑性、跃变性这一重要特征,创新性地提出一种基于线性规划的分段平滑信号的复原算法。它能够迅速使总有界变差与总观测误差最小化,减少了求解变差参数的复杂度。仿真实验说明该算法是有效的,即使在低信噪比的情况下,复原信号也能够反映原信号的基本信息。

信号复原最主要的问题就是解的不唯一性,所以必须对解强加限制,才有可能得到理想的复原效果。

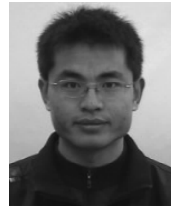
然而,现实中绝大部分信号是非平稳的,到目前为止,对于非平稳信号的研究方法还是很有限的。总有界变差方法具有重要的现实意义,也具有很大的挑战。

参考文献

- [1] Zou M Y, Unbehauen R. A few new algorithms of 2-D Blind deconvolution [J]. Optical Engineering, 1995, 34(10):2945-2956.
- [2] Fish D A, Brinicombe A M, Pike E R, Walk J G. Blind deconvolution by means of the Richardson-Lucy algorithm [J]. Optical Society of America, 1995, 12(1):58-65.
- [3] Wang Y P, Feng H J, Xu Z H, Li Q, Dai C Y. An improved Richardson-Lucy algorithm based on local prior [J]. Optics and Laser Technology, 2010, 42(5):845-849.
- [4] Tai Y W, Tan P, Brown M S. Richardson-Lucy Deblurring for Scenes under a Projective Motion Path [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 33(8):1603-1618.
- [5] Chan T F, Wong C K. Total Variation Blind Deconvolution [J]. IEEE Transaction on Image Processing, 1998, 7(3):370-395.

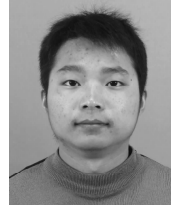
- [6] You W W, Andy M Y. Adaptive Parameter Selection for Total Variation image deconvolution [J]. Numerical Mathematics (Theory, Methods and Applications), 2009, 2(4): 427-438.
- [7] He L, Marquina A, Osher S J. Blind deconvolution using TV regularization and Bregman iteration [J]. International Journal of Imaging Systems and Technology, 2005, 15(1): 74-83.
- [8] Zhang Y. Solving Large-Scale Linear Programs by Interior-Point Methods Under the MATLAB Environment [J]. Optimization Methods and Software, 1998, 10(1): 1-31.
- [9] Combettes P L, Dung D, Vu B C. Dualization of Signal Recovery Problems [J]. Set-Valued and Variational Analysis, 2010, 18(3-4): 373-404.
- [10] 彭宏京, 侯文秀. 基于各向异性扩散偏微分方程的图像去模糊 [J]. 信号处理, 2007, 23(5): 714-717.
Peng H J, Hou W X. Image Deblurring with Anisotropic Diffusion Partial Differential Equations [J]. Signal Processing, 2007, 23(5): 714-717. (in Chinese)
- [11] Chen T, Yin W, Zhou X S, Comaniciu D, Huang T S. Total Variation Models for Variable Lighting Face Recognition [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2006, 28(9): 1519-1524.

作者简介



魏雪飞(1986-),男,江苏南京人,南京工业大学硕士研究生,主要研究方向为信号处理与通信网络。

E-mail:walsefl@163.com



葛成伟(1987-),男,江苏南京人,南京工业大学硕士研究生,主要研究方向为图像与视频处理算法。

E-mail:chengweige517@sina.com



陆建明(1968-),男,浙江嘉兴人,高工,主要研究方向为特种通信系统。

E-mail:ludaxia@126.com



包亚萍(1965-),女,江苏南京人,教授,硕导,主要研究方向为信号处理。

E-mail:ngdbyp@163.com