

# 压缩感知及其应用：从稀疏约束到低秩约束优化

马坚伟<sup>1</sup> 徐 杰<sup>2</sup> 鲍跃全<sup>3</sup> 于四伟<sup>4</sup>

- (1. 哈尔滨工业大学应用数学研究所, 哈尔滨 150001;
2. 中国科学院计算技术研究所, 北京 100190;
3. 哈尔滨工业大学土木工程学院, 哈尔滨 150001;
4. 清华大学航天航空学院, 北京 100084)

**摘 要:** 压缩感知(或称压缩采样)是国际上近期出现的一种信息理论。其核心思想是只要某高维信号是可压缩的或在某个变换域上具有稀疏性,就可以用一个与变换基不相关的测量矩阵将该信号投影到一个低维空间上,然后通过求解一个最优化问题以较高的概率从这些少量的投影中重构出原始信号。压缩感知理论突破了香农定理对信号采样频率的限制,能够以较少的采样资源,较高的采样速度和较低的软硬件复杂度获得原始信号的测量值。该理论已经被广泛应用于数字相机、医学成像、遥感成像、地震勘探、多媒体混合编码、通讯、结构健康监测等领域。本文归纳了压缩感知研究中的关键问题,探讨压缩感知从稀疏约束到低秩约束优化的发展历程,对压缩感知在遥感、地震勘探等几个相关领域的应用研究进行了综述。

**关键词:** 压缩感知; 稀疏约束; 低秩约束; 遥感; 地球物理勘探; 视频编码

**中图分类号:** TN911.7    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1003-0530(2012)05-0609-15

## Compressive Sensing and its Application: from Sparse to Low-rank Regularized Optimization

MA Jian-wei<sup>1</sup> XU Jie<sup>2</sup> BAO Yue-quan<sup>3</sup> YU Si-wei<sup>4</sup>

- (1. Institute of Applied Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;
2. Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
3. School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;
4. School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** Compressive sensing/compressive sampling (CS) is a novel information theory proposed recently. CS provides a new sampling theory to reduce data acquisition, which says that sparse or compressible signals can be exactly reconstructed from highly incomplete random sets of measurements. CS broke through the restrictions of the Shannon theorem on the sampling frequency, which can use fewer sampling resources, higher sampling rate and lower hardware and software complexity to obtain the required measurements. CS has been used widely in many fields including digital cameras, medical imaging, remote sensing, seismic exploration, multimedia hybrid coding, communications and structural health monitoring. This article firstly summarizes some key issues in CS, and then discusses the development process of the optimization algorithms in CS from the sparsity constraints to low-rank constraints. Lastly, several related applications of CS in remote sensing, seismic exploration are reviewed.

**Key words:** Compressive sensing; sparsity constraints; low-rank constraints; remote sensing; geophysical exploration; video coding

## 1 引言

根据香农采样定理,为了不失真的恢复出原始信号,采样频率应该不小于原始信号频谱中最高频率的2倍。在这种采样方式下,传感器等采集设备需要预先收集大量的数据,然后通过数据压缩技术,丢弃大部分冗余信息,只传输或存储有用的信息。图1给出了基于香农采样定理的信号编解码框架图。遵循该框架的视频图像编码技术以像素或像素块作为编码实体,用统计概率模型来描述信源。在压缩过程中,先对图像进行离散余弦变换或小波变换,然后对少数绝对值较大的系数进行编码,舍弃零系数或接近零的系数。这种先采样后丢弃冗余数据的采样方法,浪费了大量的采样数据,而且在数据压缩过程中,还需要占用额外码率对重要系数的位置信息进行编码。如果传输或存储过程中丢失部分压缩数据,经过反量化、反变换后的重建信号会存在较大的失真。因此传统编码技术需要做大量的差错控制来提高数据传输的准确性,同时也降低了信号的编码效率,这是传统的视频图像编码技术普遍存在的问题。基于该技术框架的这些编码技术,往往是以计算复杂度不断提高的代价来换取编码效率的提高。由于软硬件资源的限制,沿着这一思路的编码效率提升空间非常有限。

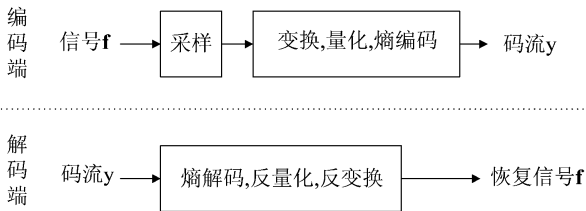


图1 传统信号采集编码框架

Fig. 1 The conventional information sampling framework

如果信号  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  本身是稀疏的或可压缩的,能否直接获取其压缩表示,从而略去对大量无用信息的采样呢? Donoho 与 Candes 等人提出的压缩感知(Compressive Sensing, CS)理论<sup>[3-9]</sup>回答了这个问题。压缩感知不再受限于香农定理对于信号采样带宽的要求,而是基于信号的稀疏性,直接从信号中获取有意义的信息,不去采集无用的信号。该理论的出现为数据采集技术带来了革命性突破,也为数据压缩打开了新的研究思路,引起了研究人员的广泛关注。压缩感知的核心思想是只要信号是稀疏的(即信号的  $\ell_0$  范数非常小),就可以用一个与变

换基不相关的测量矩阵将高维信号投影到一个低维空间上,然后通过求解一个最优化问题以较高概率从这些少量的投影中重构出原信号。由于信号的投影数据量远远小于传统采样方法所获的数据量,在信号采集的同时实现了信号压缩。图2给出了压缩感知理论中信号采样和恢复的框架图。在采样端,压缩感知对信号的采样过程是非自适应的、线性的、计算复杂度低。经压缩感知得到的信号的每个测量值其重要性是相同的,在存储和传输过程中,丢失个别测量值不会对信号恢复产生大的影响,非常有利于信道传输。在恢复端,由于  $\ell_0$  范数最小化是 NP 难问题,压缩感知理论用  $\ell_1$  范数替代  $\ell_0$  范数,通过最优化算法恢复出原始信号。

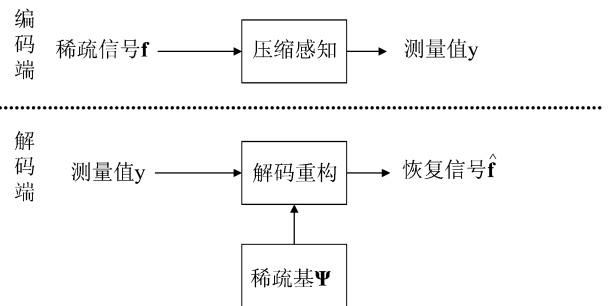


图2 压缩感知信号采集恢复框架

Fig. 2 The sampling and recovery framework based on compressive sensing

根据压缩感知理论,如果信号中的个别元素缺失或受到噪声干扰,只要该信号在某个域中是稀疏的(例如傅立叶域),我们仍然能够以较高概率将该信号恢复出来<sup>[5]</sup>。这个问题的一个自然延伸是,如果一个矩阵中的个别元素缺失,我们能否将缺失的部分填充?例如在进行问卷调查时,我们把问卷发放给很多人,此时我们可以得到一个矩阵,这个矩阵的行表示每个人,列表示每个问题。但是很多时候有些问题会没有答案,此时我们就得到了一个部分元素缺失的矩阵。那么我们能够猜想出缺失的元素是什么吗?这个问题被称之为矩阵恢复(Matrix Recovery)或矩阵完备(Matrix Completion)。Candes 等<sup>[11, 12]</sup>指出只要原始矩阵是低秩(low-rank)的,就可以通过求解矩阵核范数(矩阵奇异值的和)最小化问题恢复出原始矩阵。图3从信号类型,信号的稀疏模型和恢复算法中的稀疏约束类型这三个方面对比了压缩感知和矩阵完备。我们可以看出压缩感知理论和矩阵完备问题是一脉相承的。如何将二者放在一个统一的理论框架中研究也是压缩感知未

来发展方向。

	压缩感知	矩阵完备
信号类型	向量	矩阵
稀疏模型	范数	秩
稀疏约束	$\ell_1$ 范数	核范数

图3 压缩感知和矩阵完备对比

Fig. 3 Comparison of compressive sensing and matrix completion

压缩感知被提出后便得到众多学科领域的广泛关注,成为国际研究热点。2007年,麻省理工大学主办的技术评论杂志将 Richard Baraniuk 和 Kevin Kelly 在压缩感知成像领域的研究工作评为当年十大科技进展之一<sup>[13]</sup>。压缩感知理论具有能够缩短信号采样时间,简化信号采集设备设计,降低采集设备功耗,减少采集设备存储空间等优点,现已被广泛应用于遥感成像<sup>[1, 2, 10, 14-17]</sup>、地震勘探、表面测量<sup>[18]</sup>、地球物理数据分析<sup>[19, 20]</sup>、数据压缩、信道编码、生物传感、视频图像编码<sup>[21, 22]</sup>等领域。大量的文献和算法资源可具体参考 Rice 大学收集的“压缩感知主页”。近几年,压缩感知也引起了国内的学术界的重视,仅国家自然科学基金就资助了 200 余项科研项目。许多国内同行均取得了非常有意义的成果,可惜由于篇幅有限,本文无法一一引用论述。读者可参考同行之前所写的综述<sup>[23-26]</sup>。

本文的第2节给出稀疏模型的定义,包括稀疏信号模型和低秩矩阵模型;第3节介绍了压缩感知的理论基础,包括测量矩阵和恢复算法两个重要环节;第4节介绍了矩阵完备的理论基础;第5节围绕作者所从事的几个领域,综述压缩感知在遥感、地震勘探、视频、结构健康监测方面的应用;第6节进行了总结和展望。

## 2 稀疏模型

### 2.1 稀疏信号模型

信号的稀疏性被广泛应用于数据压缩、通信以及视频图像处理领域。自然界中的信号通常是不稀疏的,但是我们可以将信号变换到某些域(例如傅立叶域、小波域、曲波域等),如果在这些变换域中,信号的大多数变换系数为零或者绝对值很小,只有少部分变换系数的绝对值比较大,我们同样认为信号是稀疏的。这些绝对值较大的重要系数保持了信号的绝大部分信息。在有损压缩编码中,通过保存重要系数及其位置信息就可以实现信号压缩。在压缩感知理论中,信号

的稀疏性是一个最基本的前提,决定了压缩感知非自适应采样过程的有效性。定义1给出了  $k$ -稀疏信号的数学模型:

定义1: 如果  $N$  维信号  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  最多只有  $k$  个分量不为零,既:  $\|\mathbf{f}\|_0 \leq k$ ,我们就说该信号是  $k$ -稀疏的;或者虽然信号  $\mathbf{f}$  不稀疏的,但是存在一个稀疏域  $\Psi$ ,  $\mathbf{f}$  可以表示为:  $\mathbf{f} = \Psi \mathbf{x}$ , 并且  $\|\mathbf{x}\|_0 \leq k$ , 我们仍然说该信号是  $k$ -稀疏的。在本文中,我们用  $\Sigma_k$  表示  $n$  维的  $k$ -稀疏信号集合。在实际中,大多数信号往往不是严格意义上的  $k$ -稀疏信号。但是如果信号  $\mathbf{f}$  在  $\Psi$  域的变换系数呈幂式衰减,既将  $x_i$  从大到小排序后:  $|x_1| \geq |x_2| \geq \dots \geq |x_n|$ , 存在  $C, q > 0, x_i$  满足:

$$|x_i| \leq C i^{-q} \quad (1)$$

我们同样认为该信号是稀疏的或是可压缩的,并且  $q$  越大,变换系数衰减的越快,信号具有更强的可压缩性。

### 2.2 低秩矩阵模型

另一个跟稀疏性密切相关的模型是低秩矩阵。矩阵的秩反映了矩阵的固有特性。对于矩阵  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ , 矩阵的秩  $rank(\mathbf{M})$  为该矩阵极大列向量无关组中向量的个数。如果矩阵  $\mathbf{M}$  的秩远小于矩阵元素的个数  $n_1 \times n_2$ , 我们认为该矩阵是低秩(low-rank)的。低秩矩阵的集合表示如下:

$$\Pi_r = \{ \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}; rank(\mathbf{M}) \leq r, r \ll n_1 \times n_2 \} \quad (2)$$

对于秩为  $r$  的矩阵  $\mathbf{M}$ , 其奇异值分解可以表示为:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^r \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^* \quad (3)$$

其中,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r \geq 0$  为奇异值,  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r \in \mathbb{R}^{n_1}$  和  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^{n_2}$  为相应的奇异向量。

## 3 压缩感知理论

对一个信号  $\mathbf{f}$  进行采样或测量是将该信号同一系列波形进行内积的过程:

$$y_k = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_k \rangle, \quad k = 1, \dots, m \quad (4)$$

不同的测量波形得到的测量值向量  $\mathbf{y}$  有着不同的物理意义。例如用单位脉冲函数进行测量得到的测量值是信号在时间域上或空间域上的采样;利用正弦波进行测量得到的是信号的傅立叶系数,这种测量方法被用于核磁共振成像。压缩感知的测量过程同样是利用一系列波形对信号进行测量,所不同的压缩感知是对信号进行欠采样,即所用波形的数目远

小于信号的维数。这样得到的信号测量值的数目  $m$  远小于原始信号  $\mathbf{f}$  的维数  $n$  ( $m \ll n$ )。因此压缩感知在采样的同时实现了对信号的压缩。

压缩感知的采样过程在数学上表示为将一个  $n$  维的  $k$ -稀疏信号或可压缩信号  $\mathbf{x} \in \Sigma_k$  通过一个测量矩阵  $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$  ( $m \ll n$ ) 投影到低维空间上,得到  $m$  维的测量值向量  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ :

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (5)$$

如果信号  $\mathbf{f}$  在  $\Psi$  域是稀疏的,公式(5)引入稀疏域后表示如下:

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{f} = \Phi \Psi \mathbf{x} = \Theta \mathbf{x}, \quad \mathbf{f} = \Psi \mathbf{x} \quad (6)$$

其中  $\mathbf{x}$  是信号  $\mathbf{f}$  在  $\Psi$  域的稀疏系数,  $\Theta = \Phi \Psi$  是  $m \times n$  的矩阵,我们称之为感知矩阵 (Sensing Matrix)。由于测量矩阵  $\Phi$  的行数远小于列数,从  $m$  维测量值向量  $\mathbf{y}$  中恢复出  $n$  维原始信号是一个欠定问题,有无穷多解。因此,压缩感知理论主要涉及两个关键问题: 1) 如何设计测量矩阵才能保证测量过程不损失信号重要信息并且能够恢复信号; 2) 采用什么样的恢复算法可以从信号的不完备测量集中重构出原始信号。下面我们从这两个方面展开讨论压缩感知的理论基础。

### 3.1 测量矩阵

测量矩阵的重要性不言而喻。在压缩感知测量过程中,测量矩阵必须保证信号的不完备测量集能够保留原始信号的绝大部分重要信息;在压缩感知恢复过程中,测量矩阵必须保证恢复算法能够从尽可能少的测量数据中重建原始信号。测量矩阵需要具备什么性质才能满足上述要求呢? Candes 和 Tao 在<sup>[27]</sup>中指出测量矩阵  $\Phi$  需要满足一定的约束等距条件 (Restricted Isometry Property),即对于  $\mathbf{x} \in \Sigma_k$ ,如果测量矩阵  $\Phi$  的约束等距常数满足  $\delta_{2k} + \delta_{3k} < 1$ ,则能够从  $k \cdot \log(n/k)$  个测量值中精确恢复出原始信号。定义 2 中给出了约束等距常数  $\delta_k$  的定义。

定义 2<sup>[27]</sup>: 对于矩阵  $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times n}$  和所有  $k$ -稀疏信号  $\mathbf{x} \in \Sigma_k$ ,满足

$$(1 - \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\Phi \mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (7)$$

的最小数值  $\delta_k$  定义为矩阵  $\Phi$  的约束等距常数 (Restricted Isometry Constant)。如果  $\delta_k \in (0, 1)$ ,我们就说矩阵  $\Phi$  满足  $k$  阶约束等距性。

然而在实际中证明一个测量矩阵是否满足 RIP 特

性是非常困难的。Baraniuk 从测量矩阵和稀疏基的不相干性来探讨感知矩阵  $\Theta = \Phi \Psi$  是否满足 RIP。

定义 3: 测量矩阵  $\Phi$  和稀疏基  $\Psi$  之间的相干系数定义为

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq k, j \leq n} |\langle \varphi_k, \psi_j \rangle| \quad (8)$$

相干系数  $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{n}]$ ,反映了  $\Phi$  和  $\Psi$  之间的相关性。 $\mu$  越大,  $\Phi$  和  $\Psi$  之间的相关性越强。根据压缩感知理论,如果信号  $\mathbf{x}$  在某个变换域  $\Psi$  上是稀疏的并且  $\Psi$  和  $\Phi$  高度不相关,感知矩阵  $\Theta = \Phi \Psi$  会以较高的概率满足 RIP 性质,我们就可以从信号的不完备测量集中以较高的概率重构出原始信号<sup>[9, 28]</sup>。随机矩阵与任何稀疏基都具有很大的不相干性,例如独立同分布的高斯随机矩阵、独立同分布的伯努力随机矩阵,都可以用来作为压缩感知的测量矩阵。

### 3.2 恢复算法

压缩感知的恢复算法基于信号的稀疏先验条件,通过稀疏约束,将信号从高度不完备的测量集中恢复出来。最直观的做法是对信号或其变换系数的非零元素个数进行约束,通过  $\ell_0$  范数最小化求解:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad s.t. \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{f} = \Phi \Psi \mathbf{x} \quad (9)$$

其中  $\|\mathbf{x}\|_0 := |\operatorname{supp}(\mathbf{x})|$ , 是  $\ell_0$  范数。但是这需要穷举  $C_n^k$  种非零元素的排列方式才能找到全局最优解,解决的代价非常大,是一个 NP 难问题。最早由 Mallat 等人提出的匹配追踪算法<sup>[29]</sup> (Matching Pursuit, MP) 可以对(9)中的  $\ell_0$  范数最小化问题进行近似求解,其核心思想是在每次迭代时,通过计算观测向量和测量矩阵列向量的相关性,进行局部最优化来寻求观测向量的非零系数。后续的出现的一系列改进算法对 MP 进行了各种优化,例如正交匹配追踪 (OMP)<sup>[30]</sup> 算法,分段匹配追踪 (StOMP)<sup>[31]</sup>, 子空间追踪 (SP)<sup>[32]</sup>, 正则化正交匹配追踪 (ROMP)<sup>[33]</sup> 算法,压缩感知匹配追踪 (CoSaMP)<sup>[34]</sup> 算法,稀疏自适应匹配追踪 (SAMP)<sup>[35]</sup> 算法等。这些通过迭代寻找局部最优解的匹配追踪算法可以归类为贪婪算法,其特点是算法复杂度低,但是需要较多的测量值,重建精度低。

Donoho<sup>[36, 37]</sup> 等利用  $\ell_1$  范数代替  $\ell_0$  范数,将(9)的非凸组合优化问题转化为凸松弛问题求解:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad s.t. \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{f} = \Phi \Psi \mathbf{x} \quad (10)$$

其中  $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_i |\mathbf{x}_i|$ , 是  $\ell_1$  范数。基追踪<sup>[37]</sup> (Basis Pursuit, BP) 方法将(10)中有约束的  $\ell_1$  范数最小化问题转换为线性规划问题进行求解。如果信号足够稀疏,  $\ell_1$  范数最小化方法能够比较精确的恢复出原始信号。定理1给出了利用最小化  $\ell_1$  范数方法所需要测量值数目的下限。

定理1<sup>[38]</sup>: 假设信号  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  在  $\Psi$  的变换系数  $\mathbf{x}$  是  $k$ -稀疏的,  $\Phi$  是随机测量矩阵, 如果测量值的数目  $m$  满足

$$m \geq C \cdot \mu^2(\Phi, \Psi) \cdot k \cdot \log n \quad (11)$$

通过(10)中的  $\ell_1$  最小化方法, 能以较高的概率重构出原始信号(当  $m \geq C \cdot \mu^2(\Phi, \Psi) \cdot k \cdot \log(n/\delta)$ , 概率大于  $1-\delta$ )。从(11)中我们可以看出  $\Phi$  和  $\Psi$  越不相干, 所需的测量值数目越少。

接下来我们讨论  $\ell_1$  最小化方法的恢复误差。为了表达方便, 将测量矩阵  $\Phi$  或  $\Phi\Psi$  统一为  $\Theta$ ,  $\mathbf{x}$  表示稀疏或近似稀疏的原始信号, (10)中的  $\ell_1$  最小化方法重新表示为:

$$(BP) \quad \hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad s.t. \quad \mathbf{y} = \Theta\mathbf{x} \quad (12)$$

定理2<sup>[33]</sup>: 假设  $\delta_{2k} < \sqrt{2}-1$ , 存在常数  $C_0$ , (12)的解  $\hat{\mathbf{x}}$  满足

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq C_0 \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_1 / \sqrt{k} \quad \text{并且} \quad (13)$$

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_1 \leq C_0 \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_1 \quad (14)$$

其中  $\mathbf{x}_k$  是将向量  $\mathbf{x}$  保留  $k$  个最大分量而其余分量均设为零。

在实际应用中, 大多数信号是近似稀疏的, 而且信号测量过程中由于硬件设备等原因会引入误差, 当测量值存在误差的时候, 压缩感知测量过程表示为:

$$\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} + \mathbf{z} \quad (15)$$

其中  $\mathbf{z}$  为测量误差向量。在一定的误差范围内, 将(10)中的约束条件相应进行了放宽:

$$(BP_\varepsilon) \quad \hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad s.t. \quad \|\Theta\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon \quad (16)$$

其中  $\varepsilon$  为误差。公式(16)可以转化为无约束最优化问题:

$$(QP_\lambda) \quad \hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \lambda \|\mathbf{x}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \Theta\mathbf{x}\|_2^2 \quad (17)$$

定理3<sup>[3]</sup>: 假设  $\delta_{2k} < \sqrt{2}-1$ , 存在常数  $C_0$  和  $C_1$ ,

(16)的解  $\hat{\mathbf{x}}$  满足

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq C_0 \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_1 / \sqrt{k} + C_1 \cdot \varepsilon \quad (18)$$

定理2和定理3保证了压缩感知在实际应用中的鲁棒性和稳定性。

近几年, 许多快速有效的  $\ell_1$  范数最小化算法被提出来, 例如: 梯度投影法 (Gradient Projection for Sparse Reconstruction, GPSR)<sup>[39]</sup>, 内点法 ( $\ell_1$  regularized least squares, ll\_ls)<sup>[40]</sup>, 同伦算法<sup>[8]</sup>, 基于不动点的 FPC (Fixed-Point Continuation)<sup>[41]</sup> 及其改进算法 FPC\_AS (FPC Active Set)<sup>[42]</sup> 都可以用来求解 (QP<sub>λ</sub>) 问题; SPGL1 (Spectral projected gradient)<sup>[43]</sup> 能够求解 (BP<sub>ε</sub>); Bregman 迭代法<sup>[44]</sup> 以及 Split Bregman 方法<sup>[45]</sup> 基于 Bregman 距离来求解 (QP<sub>λ</sub>) 问题; FISTA (Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm)<sup>[46]</sup> 加快了收缩阈值算法 (Shrinkage-Thresholding Algorithm) 的收敛速度, 用来求解 QP<sub>λ</sub> 问题; SpaRSA (Sparse reconstruction by separable approximation)<sup>[47]</sup> 求解形如 minimize  $f(x) + \lambda g(x)$  的问题, 其中  $f(x)$  为光滑函数,  $g(x)$  为可分非光滑函数, (QP<sub>λ</sub>) 归属于这类问题; NESTA (Nesterov's algorithms)<sup>[48]</sup> 适用范围比较广, 能够求解 (BP)、(BP<sub>ε</sub>)、(QP<sub>λ</sub>) 等一系列  $\ell_1$  范数最小化问题。

## 4 矩阵完备

如果矩阵  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$  缺失部分元素, 我们将其表示为  $\mathbf{M}_{ij}$ ,  $(i, j) \in \Omega$ , 其中  $\Omega$  是矩阵元素完备集  $[n_1] \times [n_2]$  ( $[n] := \{1, \dots, n\}$ ) 的子集。这相当于对矩阵  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$  的元素进行测量得到矩阵  $\mathbf{M}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ 。我们用  $\mathcal{P}_\Omega(\mathbf{X}) : \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$  来表示测量过程:

$$[\mathcal{P}_\Omega(\mathbf{X})]_{ij} = \begin{cases} \mathbf{X}_{ij}, & (i, j) \in \Omega, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (19)$$

矩阵完备问题表示为:

$$\min_{\mathbf{X}} \operatorname{rank}(\mathbf{X}), \quad s.t. \quad \mathcal{P}_\Omega(\mathbf{X}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathbf{M}) \quad (20)$$

当测量过程存在误差时, 放宽(20)中的约束条件:

$$\min_{\mathbf{X}} \mu \cdot \operatorname{rank}(\mathbf{X}) + \frac{1}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(\mathbf{X}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathbf{M})\|_F^2 \quad (21)$$

其中,  $\mu$  是调整参数,  $\|\cdot\|_F$  是 Frobenius 范数 ( $\|\mathbf{A}\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$ ,  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ )。

类似于压缩感知的  $\ell_0$  范数最小化问题, 上述问题也是 NP 难问题, 无法直接求解。

Candes 等<sup>[11, 12]</sup> 将上述问题转化为凸松弛问题

求解:

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_*, \quad \text{s.t. } \mathcal{P}_\Omega(\mathbf{X}) = \mathcal{P}_\Omega(\mathbf{M}) \quad (22)$$

以及

$$\min_{\mathbf{X}} \mu \|\mathbf{X}\|_* + \frac{1}{2} \|\mathcal{P}_\Omega(\mathbf{X}) - \mathcal{P}_\Omega(\mathbf{M})\|_F^2 \quad (23)$$

其中  $\|\mathbf{X}\|_*$  是矩阵的核范数, 即矩阵  $\mathbf{X}$  奇异值的和。Cai 等<sup>[49]</sup> 提出的奇异值阈值法, Ma 等<sup>[50]</sup> 提出的定点和布雷格曼迭代方法, Yang 等<sup>[51]</sup> 提出的交替方向法, Keshavan 等<sup>[52]</sup> 提出的 OPTSPACE 方法可以用来求解(22)。

伴随着压缩感知理论的发展, 矩阵完备问题也引起了学术界的广泛关注, 是未来的一个热点研究问题。

## 5 压缩感知的应用

### 5.1 遥感

地球上不同的物体都在不停地吸收、发射和反射不同的电磁波。遥感就是根据这一性质, 通过各种工作平台上的探测器, 对远距离目标在非接触的条件下获取其电磁波信息, 并对电磁波的特征进行分析和应用的一门科学和技术。遥感技术的应用领域非常广, 例如: 深空探测、灾害监测、环境监测、农作物监测、军事侦察等。一般来说, 遥感技术主要包括遥感图像的获取、传输、接收和分析应用四个环节。为了获取清晰或高清的遥感图像, 探测器需要存储和传输大量的像素信息。虽然可以在机载成像设备上采用压缩技术, 保留绝对值较大的变换系数, 丢弃绝对值为零或较小的变换系数来降低数据量, 但是这也造成了采样资源的浪费, 增加了探测器的功耗, 缩短了机载设备上电池

的使用寿命。由于遥感图像在小波域或曲波域具有稀疏性, 满足压缩感知理论对于稀疏性的要求, Ma 在<sup>[2]</sup> 中基于单像素照相机<sup>[28, 53]</sup>, 提出了单像素航空遥感, 只用一个感光器, 但通过多次测量进行成像 (single-pixel but multi-time, SPMT), 用来减少光学遥感数据获取和成像的代价。图4给出了利用单像素遥感对月球表面场景遥感成像的例子, 从图中可以看出利用 noiselet 进行编码, 然后利用曲波进行解码可以取得最好的恢复效果。在这种新的基于压缩感知理论的遥感成像系统中, 采样和压缩同时进行, 将运算复杂度从机载编码端转移到了离线解码端, 大大降低了探测器的功耗, 对于进行深空或远距离长时间的遥感探测作业意义尤为重大。Bobin 等<sup>[54]</sup> 将压缩感知应用于天文遥感, 并指出利用压缩感知进行数据融合要优于标准压缩技术。Ma 等在<sup>[1]</sup> 和<sup>[10]</sup> 中分别结合去模糊和数据融合技术, 对焦距模糊情况和卫星冗余测量情况下的压缩感知遥感成像进行了探讨。图5为利用压缩感知对大气遥感图像进行去模糊的例子, 从图中可以看出泊松积分和迭代曲波阈值结合起来进行去模糊的效果最好。图6是对月球表面采用不同的测量矩阵, 将测量矩阵一列偏移重叠冗余测量后, 利用冗余数据恢复图像的例子。Yu 等<sup>[16]</sup> 针对遥感应应用中压缩感知复数恢复问题, 提出了对复数的幅度和相位同时进行平滑约束然后通过  $\ell_p$  ( $0 < p < 1$ ) 范数最小化进行恢复的方法。在太赫兹成像系统中, 这种方法可以减少所需要的测量值并且能够提高恢复图像的信噪比, 图7给出了对太赫兹图像在50%的测量率下幅度和相位恢复结果。

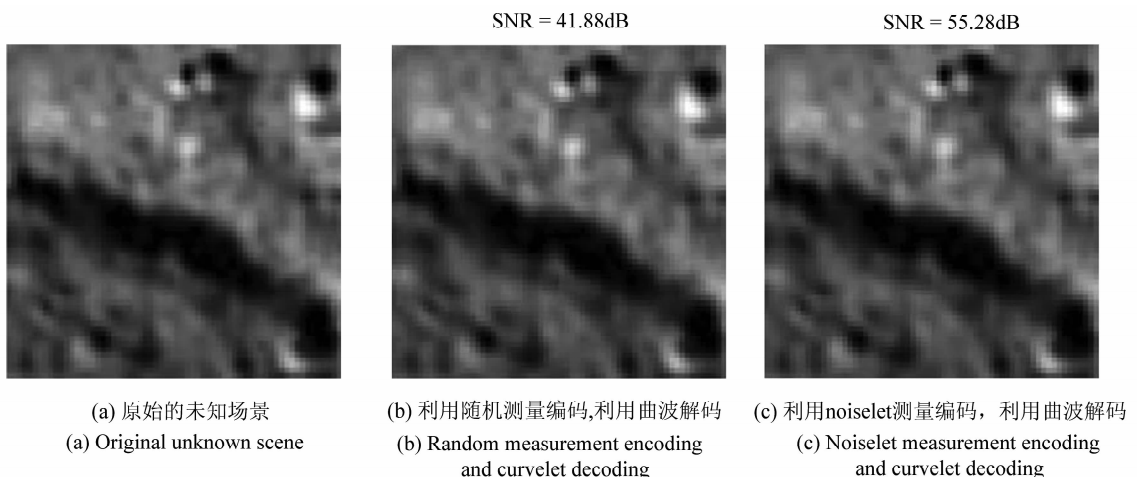


图4<sup>[2]</sup> 月球表面的单像素遥感成像

Fig. 4<sup>[2]</sup> Single-pixel imaging for moon's surface

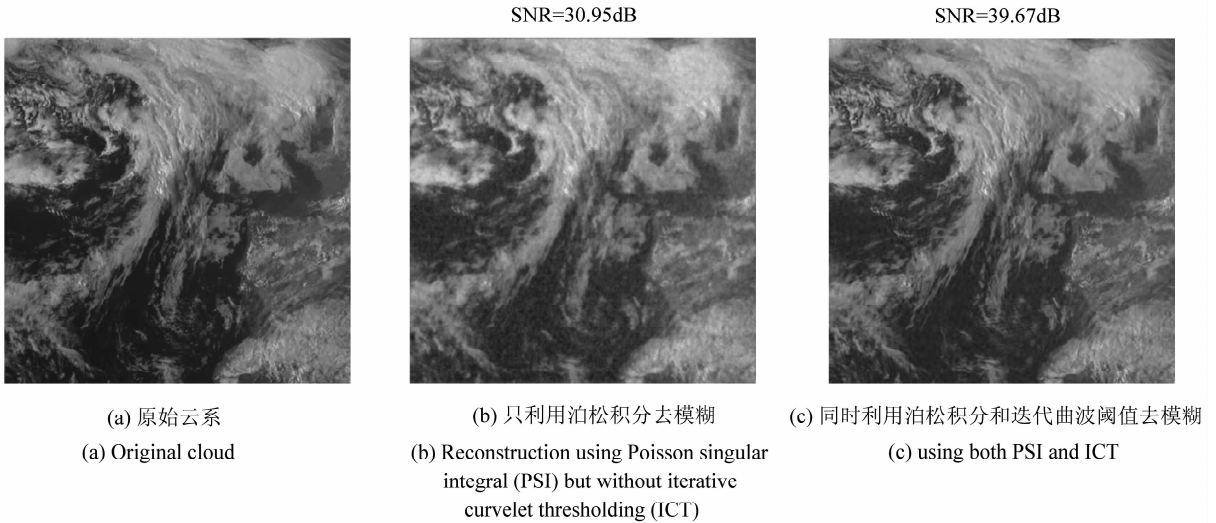


图 5<sup>[1]</sup> 大气遥感图像的压缩感知去模糊  
Fig. 5<sup>[1]</sup> CS deblurring for atmospheric remote sensing

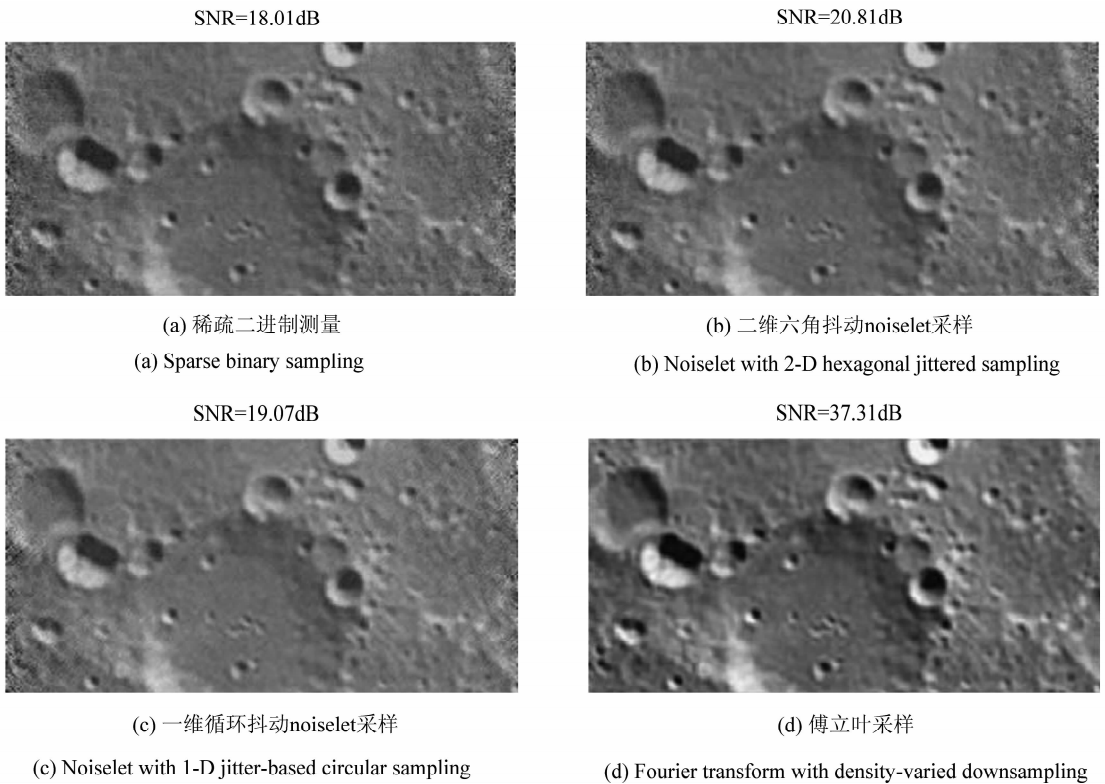


图 6<sup>[10]</sup> 利用不同的压缩感知测量矩阵对月球表面进行一系列偏移重叠冗余测量(每次的测量率均为 5%),最后进行解码  
Fig. 6<sup>[10]</sup> Decoding of a Moon surface from one-column-shift overlapping observations using different CS measurement matrices (5% measurements)

压缩感知也被广泛被应用于雷达领域。Herman 和 Strohmer<sup>[55]</sup> 基于目标在距离-多普勒空间中的稀疏性,利用压缩感知进行高分辨率雷达成像。Chen 和

Vaidyanathan<sup>[56]</sup> 进一步利用目标在距离-多普勒-角度空间的稀疏性,将压缩感知应用于 MIMO 雷达。Huang 等<sup>[57]</sup> 将压缩感知应用于穿墙成像雷达中。Bhatta-

charya 等<sup>[58]</sup>和 Rilling 等<sup>[59]</sup>将压缩感知用于合成孔径雷达原始数据压缩。Wu 等<sup>[60]</sup>在多普勒频谱和中心频率模糊的情况下,利用 Radon 变换和压缩感知理论估计活动目标运动参数。Ender 在<sup>[61]</sup>中研究了压缩感知雷达的通用体系结构和一些实现细节方面的考虑,并探讨了压缩感知在脉冲压缩、雷达成像和利用阵列天线进行大气空间监测三个方面的应用。Potter 在<sup>[62]</sup>中

综述了压缩感知在雷达中的应用,并总结了压缩感知和雷达成像相关的五个原因,指出了压缩感知将会促进雷达成像的长远发展。Khwaja 和 Ma 在<sup>[14]</sup>中研究了压缩感知在合成孔径雷达(SAR)中的两个应用:在高信杂比和低信杂比的情况下,估计运动目标速度;利用 SAR 图像在曲波域的稀疏性,进行在线压缩和离线解压。

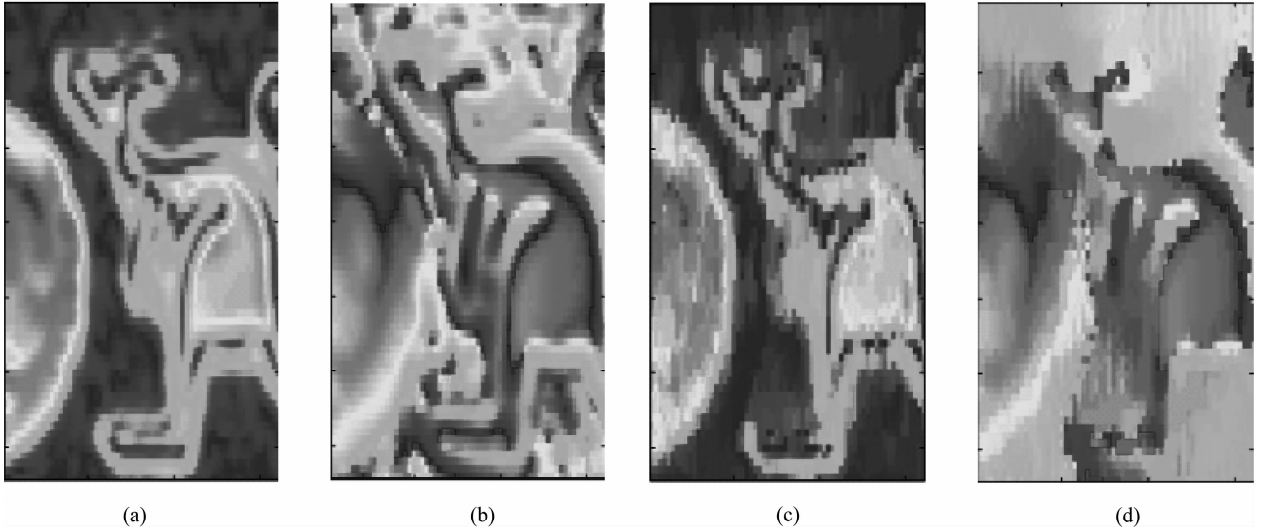


图 7<sup>[16]</sup> 太赫兹图像的幅度和相位恢复结果(测量率为 50%)。(a)(b)分别为原始数据的幅度和相位;(c)(d)分别为幅度和相位的恢复结果(SNR=11 dB)。

Fig. 7<sup>[16]</sup> Amplitude and phase of reconstructed THz data using 50% measurements. (a)(b) Original amplitude and phase. (c)(d) Reconstructed amplitude and phase.

## 5.2 地震勘探

在地震勘探中,由于存在被噪声严重污染的地震道、死道或者受到地形的限制,容易造成地震数据的缺失或空间采样不足。恢复缺失的地震道是地震数据处理中一个非常关键的问题。目前压缩感知已被用于地震数据中缺失地震道的重建。Herrmann 等在<sup>[63]</sup>中将压缩感知理念引入地震数据恢复,从地震数据的随机下采样中恢复缺失的地震道。Tang 等在<sup>[20]</sup>中利用 2D 抖动采样(Jittered Sampling)对地震数据进行测量,然后基于地震数据在曲波域的先验稀疏性,利用 $\ell_1$ -范数最小化进行数据恢复。Wang 等在<sup>[64]</sup>中提出了分段随机采样对地震数据进行测量,然后利用 $\ell_1$ 范数约束的置信域法恢复地震波。Tang

等在<sup>[65]</sup>通过控制最大地震空区的大小,优化了压缩感知采样策略,这种采样方式优于随机采样和抖动采样,图 8 给出了不同采样方式得到的重建图像和误差对比,这种优化的压缩感知采样策略能够取得较好的恢复效果。Yang, Ma, Osher 在<sup>[19]</sup>中将恢复缺失地震道的问题转化为了低秩约束优化的矩阵完备问题,即如果一个矩阵缺失某些列,如何将缺失的数据填充起来。由于列缺失的矩阵完备问题无法直接求解,Yang 等利用纹理块变换,将其转化为至少每一列都存在一个元素的低秩矩阵完备问题,然后利用现有的矩阵完备算法进行求解。图 9 给出了地震数据在丢失 50% 的道后,利用低秩约束优化方法,较好地恢复出完整地震数据的例子。



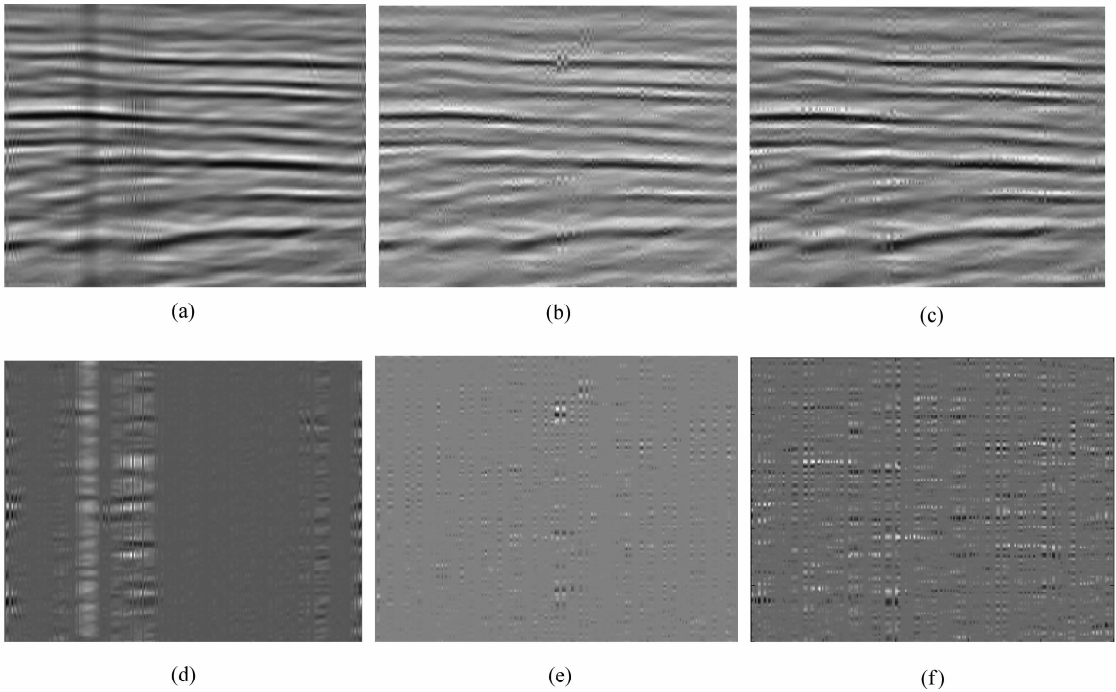
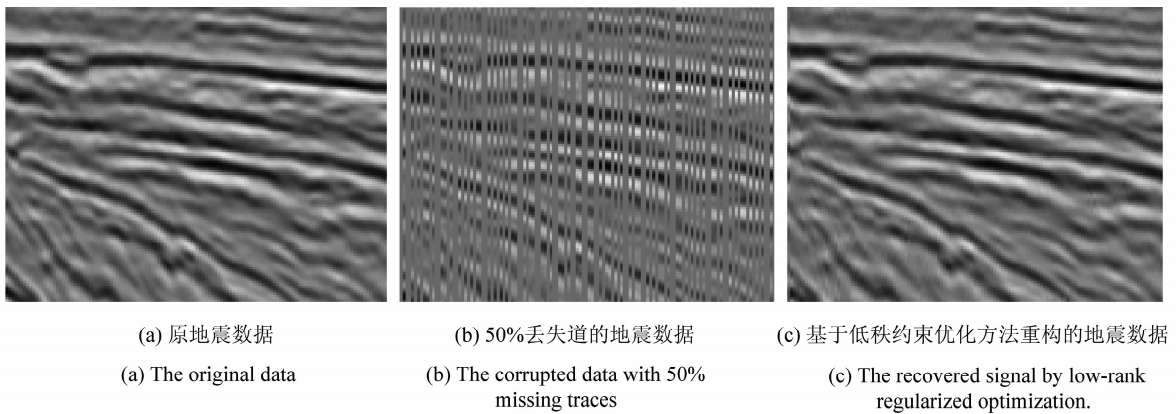


图 8<sup>[65]</sup> 采用不同采样方式重建的地震波。(a)(d)采用随机采样而没有控制最大空区的恢复结果和误差(SNR=23.9dB);(b)(e)抖动采样和小波恢复结果(SNR=24.0dB);(c)(f)优化的采样和小波恢复结果(SNR=24.2dB)。

Fig. 8<sup>[65]</sup> Recovery results of seismic data by different undersampling schemes

(a)(d) Recovered data and error using random undersampling without control on maximum gap size. (b)(e) Recovered data and error by jittered sampling and wavelet-based reconstruction. (c)(f) Recovered data and error by optimized sampling and wavelet-based reconstruction.



(a) 原地震数据  
(a) The original data

(b) 50%丢失的地震数据  
(b) The corrupted data with 50% missing traces

(c) 基于低秩约束优化方法重构的地震数据  
(c) The recovered signal by low-rank regularized optimization.

图 9<sup>[19]</sup> 基于矩阵完备的地震数据重构

Fig. 9<sup>[19]</sup> Recovery results of seismic data by matrix completion

### 5.3 视频图像压缩

当前典型的视频图像压缩技术都是基于预测/变换的混合编码技术框架,遵循该框架制定的视频编码国际标准有 ISO/IEC 制定的 MPEG-X 系列和

ITU-T 制定的 H. 26X 系列;图像编码标准有 JPEG 和 JPEG 2000。这些压缩技术都是先对视频图像进行全采样,然后通过帧内帧间预测去除冗余,再进行小波变换或 DCT 变换,丢弃大部分绝对值较小的



虽然压缩感知理论在多媒体领域已经取得了一定进展,但是目前基于压缩感知的视频图像压缩效率还无法跟传统的视频图像编码技术相比。如何发挥压缩感知的理论优势,开发出适用的新型压缩技术,还有许多难点亟待解决。

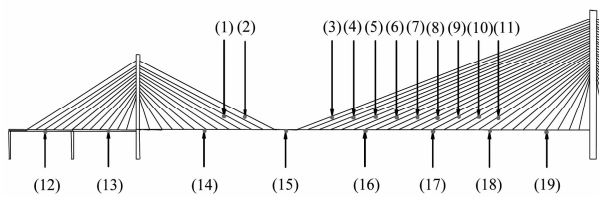
### 5.4 结构健康监测

近些年来,结构健康监测中的数据采集和传输技术吸引了越来越多学者的注意。由于土木工程结构规模大,服役环境复杂,需要布置大量的传感器进行实时监测。如何在节约传感器资源和能量消耗的前提下,实现对海量采集数据进行有效压缩和鲁棒传输是值得研究的科学问题。Bao 等<sup>[77]</sup>基于压缩感知的理论优势,研究了结构健康监测振动响应数据的 Bayesian 压缩感知(BCS)方法<sup>[78]</sup>以及无线传感器丢失数据的恢复方法<sup>[79]</sup>,并将研究成果应用于山东滨州黄河公路大桥(图 11)和国家游泳中心的加速度响应监测中。结果表明,由于采用了 ARD(Automatic Relevance Determination)先验概率密度函数,BCS 方法不仅可以重构信号,而且具有去噪的作用,BCS 重构的结果更接近于去噪声之后的原始数据;BCS 和 CS 的重构误差都随着测量点数的增加而减少;BCS 和 CS 方法都更适合窄带过程,对宽带过程的信号压缩效率较差、重构误差较大。



(a) 山东滨州黄河公路大桥

(a) Shandong Binzhou Yellow River Highway Bridge



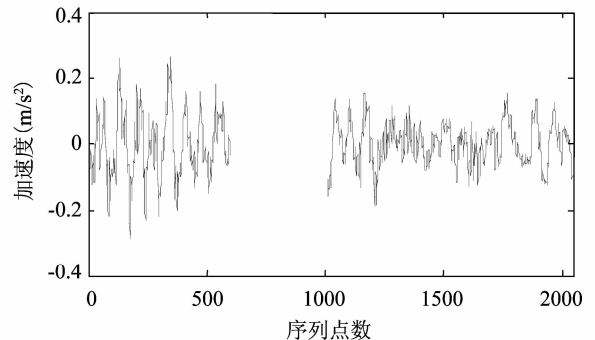
(b) 监测系统加速度传感器布置

(b) Locations of the accelerometers

图 11<sup>[77]</sup> 结构健康监测中的加速度压缩感知

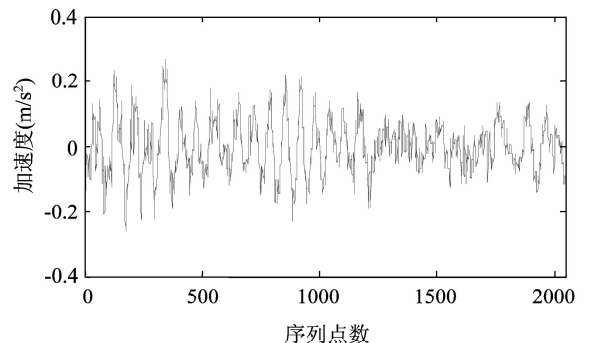
Fig. 11<sup>[77]</sup> CS for accelerometer signals in structural health monitoring.

由于大型土木工程服役环境复杂,无线传感器与无线传感网络实际工程应用时,存在数据包丢失的问题(无线传输通常以数据包的方式传输,一个包中包含多个数据点)。一方面是因为无线节点传输数据时,易受周边复杂环境,特别是无线电干扰易引起数据的丢失,或无线电干扰会导致路由协议无线链路中断引起数据丢失。另一方面则为无线基站吞吐量问题,主要是基站接收大容量数据时,由于基站本身处理能力问题,造成数据拥塞而丢失数据。根据桥梁现场无线传感器实测的数据证明,78.8%的测试数据存在丢包问题,丢包率最大可以达到 20.22%<sup>[79]</sup>。Bao 等<sup>[78, 79]</sup>采用基于压缩感知的无线传感器丢失数据恢复方法,该方法首先在无线节点端将传输的原始信号  $\mathbf{x}$ ,通过随机采样矩阵转化成  $\mathbf{y}=\Phi\mathbf{x}$ ,然后对  $\mathbf{y}$  进行无线传输,在基站对接收到的可能存在部分丢失的信号  $\mathbf{y}$  进行重构,恢复原始信号。对桥梁现场实测加速度传感器数据进行验证,模拟真实的无线传感器随机丢包,连续丢包两种工况,考虑无线传输过程中的噪声干扰,图 12 是在原始信号上丢失 20% 数据时的恢复结果,从图中看出丢失的数据得到了较好的恢复。



(a) 丢失20%数据的原始加速度信号

(a) Original accelerometer signals with 20% missing data



(b) 恢复之后的信号

(b) CS reconstructed data

图 12<sup>[79]</sup> 丢失数据恢复结果

Fig. 12<sup>[79]</sup> Recovery results of accelerometer signals by CS

Morlier 和 Bettebghor<sup>[80]</sup>将压缩采样技术应用到了结构模态振型的重构中去,并对平板结构进行了分析,结果表明,可以通过少量测点即可重构结构的振型。虽然将压缩感知用于结构健康监测仍处于起步阶段,但是已经展现出美好的应用前景。结构健康监测中存在较多的稀疏反问题,压缩采样理论对这些问题解决提出了新的思路。研究表明压缩感知理论适合于土木工程中的窄带信号的压缩,能够增加数据无线传输的鲁棒性,在基于无线传感器与无线传感网络的结构健康监测中具有很好的应用前景。

## 6 总结和展望

本文介绍了压缩感知从稀疏约束到低秩约束优化的基本原理,并归纳探讨了其在遥感、地震勘探、多媒体编码和结构健康监测方面的一些主要应用。目前关于压缩感知的研究大多停留在理论阶段,如何从理论走向实际应用还尚需时日,这是压缩感知未来的研究重点之一。另外如何将压缩感知的稀疏约束和矩阵完备的低秩约束结合起来,形成统一的理论框架也是未来的发展方向。

**致谢:** 非常感谢武汉大学孙洪教授和编辑部的邀请,使作者有机会撰写本综述论文。本文研究受教育部新世纪优秀人才支持计划(编号:NCET-11-0804)、国家自然科学基金(编号:51008095)、国家科技支撑计划(编号:2011BAK02B02)等资助,一并感谢!

### 参考文献

- [1] J. Ma, F. X. Le Dimet. Deblurring from highly incomplete measurements for remote sensing [J]. IEEE. T. Geosci. Remote, 2009, 47(3): 792-802.
- [2] J. Ma. Single-pixel remote sensing [J]. Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE, 2009, 6(2): 199-203.
- [3] E. J. Candes, J. Romberg, T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. Commun. Pur. Appl. Math, 2006, 59(8): 1207-1223.
- [4] E. J. Candes. Compressive sampling [C] // Proceedings of International Congress of Mathematicians. Zürich, Switzerland: European Mathematical Society Publishing House, 2006. 1433-1452.
- [5] E. J. Candes, J. Romberg, T. Tao. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE. T. Inform. Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [6] E. J. Candes, T. Tao. Near-optimal signal recovery from random projections: universal encoding strategies [J]. IEEE. T. Inform. Theory, 2006, 52(12): 5406-5425.
- [7] D. L. Donoho. Compressed sensing [J]. IEEE. T. Inform. Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [8] D. L. Donoho, Y. Tsaig. Fast solution of l1-norm minimization problems when the solution may be sparse [R]. Department of Statistics, Stanford University, USA, 2008.
- [9] E. J. Candes, M. B. Wakin. An introduction to compressive sampling [J]. IEEE. Signal Proc. Mag, 2008, 25(2): 21-30.
- [10] J. Ma, M. Y. Hussaini. Extensions of compressed imaging: flying sensor, coded mask, and fast decoding [J]. IEEE. T. Instrum. Meas., 2011, 60(9): 3128-3139.
- [11] E. J. Candes, B. Recht. Exact matrix completion via convex optimization [J]. Found. Comput. Math., 2009, 9(6): 717-772.
- [12] E. J. Candes, T. Tao. The power of convex relaxation: near-optimal matrix completion [J]. IEEE. T. Inform. Theory, 2010, 56(5): 2053-2080.
- [13] MIT Technology Review. Digital imaging, reimagined-10 emerging technologies 2007 [R]. 2007.
- [14] A. S. Khwaja, J. Ma. Applications of compressed sensing for SAR moving-target velocity estimation and image compression [J]. IEEE. T. Instrum. Meas., 2011, 60(8): 2848-2860.
- [15] J. Ma. A single-pixel imaging system for remote sensing by two-step iterative curvelet thresholding [J]. Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE, 2009, 6(4): 676-680.
- [16] S. Yu, A. S. Khwaja, J. Ma. Compressed sensing of complex-valued data [J]. Signal Process., 2012, 92(2): 357-362.
- [17] J. Ma, A. S. Khwaja, M. Y. Hussaini. Signal and image processing for remote sensing [M]. 2012. 73-90.
- [18] J. Ma. Compressed sensing for surface characterization and metrology [J]. IEEE. T. Instrum. Meas., 2010, 59(6): 1600-1615.
- [19] Y. Yang, J. Ma, S. Osher. Seismic data reconstruction via matrix completion [J]. Inverse Problems and Imaging, submitted, 2012.
- [20] G. Tang, R. Shahidi, J. Ma, F. Herrmann. Application of

- randomized sampling schemes to curvelet-based sparsity-promoting seismic data recovery [J]. *Geophys. Prospect.*, to appear, 2010.
- [21] J. Xu, J. Ma, D. Zhang, et al. Compressive video sensing based on user attention model [C]//Picture Coding Symposium (PCS), 2010. 90-93.
- [22] J. Ma, G. Plonka, M. Y. Hussaini. Compressive video sampling with approximate message passing decoding [J]. *IEEE. T. Circ. Syst. Vid.*, to appear, 2012.
- [23] 石光明, 刘丹华, 高大化, et al. 压缩感知理论及其研究进展 [J]. *电子学报*, 2009, 37(5):1070-1081.  
G. Shi, D. Liu, D. Gao, et al. Advances in theory and application of compressed sensing [J]. *ACTA ELECTRONICA SINICA*, 2009, 37(5):1070-1081. (in Chinese)
- [24] 李树涛, 魏丹. 压缩传感综述 [J]. *自动化学报*, 2009, 35(11):1369-1377.  
S. Li, D. We. A survey on compressive sensing [J]. *ACTA AUTOMATICA SINICA*, 2009, 35(11):1369-1377. (in Chinese)
- [25] 潘榕, 刘昱, 侯正信, et al. 基于局部 DCT 系数的图像压缩感知编码与重构 [J]. *自动化学报*, 2011, 37(6):674-681.  
R. Pan, Y. Liu, Z. Hou, et al. Image coding and reconstruction via compressed sensing based on partial DCT coefficients [J]. *ACTA AUTOMATICA SINICA*, 2011, 37(6):674-681. (in Chinese)
- [26] 戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究 [J]. *计算机学报*, 2011, 34(3):425-434.  
Q. Dai, C. Fu, X. Ji. Research on compressed sensing [J]. *Chinese Journal of Computers*, 2011, 34(3):425-434. (in Chinese)
- [27] E. J. Candes, T. Tao. Decoding by linear programming [J]. *IEEE. T. Inform. Theory*, 2005, 51(12):4203-4215.
- [28] R. G. Baraniuk. Compressive sensing [J]. *IEEE. Signal Proc. Mag.*, 2007, 24(4):118-121.
- [29] S. G. Mallat, Z. Zhifeng. Matching pursuits with time-frequency dictionaries [J]. *IEEE. T. Signal Proces.*, 1993, 41(12):3397-3415.
- [30] J. A. Tropp, A. C. Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. *IEEE. T. Inform. Theory*, 2007, 53(12):4655-4666.
- [31] D. L. Donoho, Y. Tsaig, I. Drori, et al. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit [J]. *IEEE. T. Inform. Theory*, submitted, 2006.
- [32] W. Dai, O. Milenkovic. Subspace pursuit for compressive sensing reconstruction [J]. *IEEE. T. Inform. Theory*, 2009, 55(5):2230-2249.
- [33] D. Needell, R. Vershynin. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit [J]. *Found. Comput. Math.*, 2009, 9(3):317-334.
- [34] D. Needell, J. A. Tropp. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples [J]. *Appl. Comput. Harmon. A.*, 2009, 26(3):301-321.
- [35] T. Do, L. Gan, N. Nguyen, et al. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing [C]//42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. *IEEE*, 2009. 581-587.
- [36] D. L. Donoho, M. Elad, V. N. Temlyakov. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise [J]. *IEEE. T. Inform. Theory*, 2006, 52(1):6-18.
- [37] S. S. B. Chen, D. L. Donoho, M. A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1998, 20(1):33-61.
- [38] E. J. Candes, J. Romberg. Sparsity and incoherence in compressive sampling [J]. *Inverse. Probl.*, 2007, 23(3):969-985.
- [39] M. A. T. Figueiredo, R. D. Nowak, S. J. Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4):586-597.
- [40] K. Seung-Jean, K. Koh, M. Lustig, et al. An interior-point method for large-scale  $l_1$ -regularized least squares [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4):606-617.
- [41] E. Hale, W. Yin, Y. Zhang. A fixed-point continuation method for  $l_1$ -regularized minimization with applications to compressed sensing [R]. CAAM TR07-07, Rice University, 2007.
- [42] Z. Wen, W. Yin, D. Goldfarb, et al. A fast algorithm for sparse reconstruction based on shrinkage, subspace optimization, and continuation [J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2010, 32(4):1832-1857.

- [43] E. Van Den Berg, M. Friedlander. Probing the Pareto frontier for basis pursuit solutions [J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2008, 31(2):890-912.
- [44] W. Yin, S. Osher, D. Goldfarb, et al. Bregman iterative algorithms for  $\ell_1$ -minimization with applications to compressed sensing [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, 1(1):143-168.
- [45] T. Goldstein, S. Osher. The split Bregman method for  $\ell_1$  regularized problems [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(2):323-343.
- [46] A. Beck, M. Teboulle. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(1):183-202.
- [47] S. J. Wright, R. D. Nowak, M. A. T. Figueiredo. Sparse reconstruction by separable approximation [J]. *IEEE. T. Signal Proces.*, 2009, 57(7):2479-2493.
- [48] S. Becker, J. Bobin, E. J. Candes. NESTA: A fast and accurate first-order method for sparse recovery [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2011, 4(1):1-39.
- [49] J. F. Cai, E. J. Candes, Z. Shen. A singular value thresholding algorithm for matrix completion [J]. *SIAM J. Optimiz.*, 2010, 20(4):1956-1982.
- [50] S. Ma, D. Goldfarb, L. Chen. Fixed point and Bregman iterative methods for matrix rank minimization [J]. *Math. Program.*, 2011, 128(1):321-353.
- [51] J. Yang, X. Yuan. Linearized augmented Lagrangian and alternating direction methods for nuclear norm minimization [J]. *Math. Comput.*, to appear, 2011.
- [52] R. H. Keshavan, A. Montanari, O. Sewoong. Matrix completion from a few entries [J]. *IEEE. T. Inform. Theory*, 2010, 56(6):2980-2998.
- [53] M. F. Duarte, M. A. Davenport, D. Takhar, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling [J]. *IEEE. Signal Proc. Mag.*, 2008, 25(2):83-91.
- [54] J. Bobin, J. L. Starck, R. Ottensamer. Compressed sensing in astronomy [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2008, 2(5):718-726.
- [55] M. A. Herman, T. Strohmer. High-resolution radar via compressed sensing [J]. *IEEE. T. Signal Proces.*, 2009, 57(6):2275-2284.
- [56] C. Chun-Yang, P. P. Vaidyanathan. Compressed sensing in MIMO radar [C]//42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. 2008.
- [57] H. Qiong, Q. Lele, W. Bingheng, et al. UWB through-wall imaging based on compressive sensing [J]. *IEEE. T. Geosci. Remote*, 2010, 48(3):1408-1415.
- [58] S. Bhattacharya, T. Blumensath, B. Mulgrew, et al. Fast encoding of synthetic aperture radar raw data using compressed sensing [C]//14th Workshop on Statistical Signal Processing. *IEEE*, 2007.
- [59] G. Rilling, M. Davies, B. Mulgrew. Compressed sensing based compression of SAR raw data [C]//SPARS'09-Signal Processing with Adaptive Sparse Structured Representations. 2009.
- [60] Q. Wu, M. Xing, C. Qiu, et al. Motion parameter estimation in the SAR System with low PRF sampling [J]. *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, 2010, 7(3):450-454.
- [61] J. H. G. Ender. On compressive sensing applied to radar [J]. *Signal Process.*, 2010, 90(5):1402-1414.
- [62] L. C. Potter, E. Ertin, J. T. Parker, et al. Sparsity and compressed sensing in radar imaging [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2010, 98(6):1006-1020.
- [63] F. J. Herrmann, G. Hennenfent. Non-parametric seismic data recovery with curvelet frames [J]. *Geophys. J. Int.*, 2008, 173(1):233-248.
- [64] Y. Wang, J. Cao, C. Yang. Recovery of seismic wavefields based on compressive sensing by an  $\ell_1$ -norm constrained trust region method and the piecewise random subsampling [J]. *Geophys. J. Int.*, 2011, 187(1):199-213.
- [65] W. Tang, J. Ma, F. J. Herrmann. Optimized compressed sensing for curvelet-based seismic data reconstruction [J]. preprint, 2009.
- [66] M. B. Wakin, J. N. Laska, M. F. Duarte, et al. Compressive imaging for video representation and coding [C]//Picture Coding Symposium (PCS). 2006.
- [67] M. B. Wakin, J. N. Laska, M. F. Duarte, et al. An architecture for compressive imaging [C]//IEEE International Conference on Image Processing. 2006.
- [68] P. Jae Young, M. B. Wakin. A multiscale framework for compressive sensing of video [C]//Picture Coding Symposium. 2009.
- [69] V. Stankovic, L. Stankovic, S. Cheng. Compressive video sampling [C]//Eusipco-2008 16th European Signal Pro-

- cessing Conference. Lausanne, Switzerland,2008.
- [70] J. Zheng, E. L. Jacobs. Video compressive sensing using spatial domain sparsity [J]. *Opt. Eng.*,2009,48(08): 1-10.
- [71] J. Xu, J. Ma, D. Zhang, et al. Improved total variation minimization method for compressive sensing by intra prediction [J]. *Signal Process.*, to appear,2011.
- [72] Y. Baig, E. M. K. Lai, J. P. Lewis. Quantization effects on compressed sensing video [C]//17th International Conference on Telecommunications. IEEE,2010.
- [73] M. F. Duarte, S. Sarvotham, D. Baron, et al. Distributed compressed sensing of jointly sparse signals [C]//Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers. IEEE,2005. 1537-1541.
- [74] J. Prades-Nebot, Y. Ma, T. Huang. Distributed video coding using compressive sampling [C]//Picture Coding Symposium. IEEE,2009. 1-4.
- [75] L. Kang, C. Lu. Distributed compressive video sensing [C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. IEEE,2009.
- [76] T. T. Do, Y. Chen, D. T. Nguyen, et al. Distributed compressed video sensing [C]//16th IEEE International Conference on Image Processing. IEEE,2009. 1381-1384.
- [77] Y. Bao, J. L. Beck, H. Li. Compressive sampling for accelerometer signals in structural health monitoring [J]. *Structural Health Monitoring*,2011,10(3):235-246.
- [78] 鲍跃全. 结构健康监测的数据压缩采样与损伤识别融合方法 [D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学土木工程学院,2009.
- Yuequan Bao. Compressive sampling for structural health monitoring and damage detection methods based on information fusion [D]. Harbin: School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology,2009. (in Chinese)
- [79] Y. Bao, H. Li, X. Sun, et al. A data loss recovery approach for wireless sensor networks using a compressive sampling technique [J]. *Structural Health Monitoring-An International Journal*, under review,2011.
- [80] J. Morlier, D. Bettebghor. Compressed sensing applied to mode shapes reconstruction [C]//IMAC Conference and exposition on structural dynamics. Jacksonville, USA,2012.

### 作者简介



马坚伟(1976-),男,出生于浙江,2002年在清华大学博士毕业。现为哈尔滨工业大学教授、博导、龙江学者特聘教授、应用数学研究所所长。从事地震勘探、稀疏变换、压缩感知、遥感成像。已在SCI期刊发表论文54篇。撰写英文邀请综述论文3篇、邀请书章2篇。获得2011年中国地球物理学会的傅承义奖、第十届黑龙江省青年科技奖、教育部新世纪优秀人才支持计划、入选2010年度中国百篇最具国际影响力学术论文。E-mail: jma@hit.edu.cn



徐杰(1982-),男,出生于山西,中国科学院计算技术研究所博士研究生,研究方向为视频编码,多媒体内容分析,信号处理等。E-mail: xujie@ict.ac.cn