

# 离散傅里叶变换及变参考阵元特征法 在相干信号估计中的应用

林 亭 曾新吾 孙海洋

(国防科学技术大学光电科学与工程学院)

**摘 要:** 本文讨论理想条件下均匀线阵 (ULA) 对相干入射信号的高分辨测向问题。在分析经典多重信号分类法 (MUSIC) 对相干信号测向失效原因的基础上提出新算法, 它利用 1) 离散傅里叶变换 (DFT) 估计入射信号数目; 2) 变参考阵元重构入射信号功率矩阵估计入射信号方位角。通过与经典 MUSIC 算法比较验证了该算法对相干入射信号估计的可行性, 并经过进一步分析得出如下结论: 1) 文中介绍的算法在不减少阵列有效口径前提下能够对高度相干信号进行高分辨测向; 2) 在低信噪比条件下能够精确估计入射信号方位角; 3) 随着阵列中阵元数目的增加, 阵列分辨率逐渐提高。

**关键词:** ULA; DFT; 高分辨测向; 变参考阵元法

**中图分类号:** TN91    **文献标识码:** A    **文章编号:** 1003-0530(2012)03-0404-06

## DFT and Shift Reference Sensor Method Applied in Coherent Signal Parameter Estimation

LIN Ting ZENG Xin-wu SUN Hai-yang

(College of Optoelectronic Engineering, National University of Defense Technology)

**Abstract:** This paper concerned with high-resolution direction finding of coherent signals incident on ULA (Uniform Linear Array). Based on the analysis of the reason of the classical MUSIC failure in the case of coherent signals existence, a new coherent signal parameter estimation algorithm was developed. The algorithm estimates the number of incident signals using DFT (Discrete Fourier Transform), and then estimates direction of arrival by shift reference sensor method in reconstructing power matrix of incident signals. Compared to the classical MUSIC, the algorithm performs well when there were coherent signals. Simulating on computer were applied to verify the algorithm, and we found that: 1) the new algorithm can be used to high-resolution direction finding of coherent signals without reducing array effective aperture; 2) it can estimate number of incident signals accurately in low SNR (Signal Noise Ratio); 3) The resolution of the algorithm becomes much higher when the number of sensors increases.

**Key words:** ULA; DFT; high-resolution direction finding; shift reference sensor method

### 1 引言

近年来,尽管阵列信号处理中的高分辨测向技术发展迅速,但是仍然存在一些方向需要深入研究。例如,由多途径传播引起的信号相干的高分辨测向问题要求进一步解决,文中的算法能够很好的满足这一要求。

阵列信号处理算法主要有常规波束形成法 (CBF<sup>[1]</sup>)、MUSIC 算法<sup>[2]</sup>等。常规波束形成法的分辨率受瑞利准则限制;经典 MUSIC 算法对相关信号的测向效果不理想。目前对相干信号测向算法的研究大多基于空间平滑<sup>[3]</sup>进行测向。虽然这一方法十分有效,但它降低了阵列的有效口径<sup>[4,5]</sup>。此外,在实际应用中由于入射信号个数和子阵

所含阵元数目无法确定使得这一算法难以实现。

为了使算法易于实现,同时保持阵列有效口径,我们引入变参考阵元特征法。本文分析现有一些算法对相干信号测向失效原因,利用 DFT 正确估计相干信号的数目,在不减少阵列有效口径的前提下构造信号功率矩阵,消除相关影响,对高度相干入射信号作出高分辨测向并通过仿真实现这一算法。

### 2 经典 MUSIC 算法描述及其失效分析

MUSIC 算法以接收信号的自相关矩阵为基础,以接收信号线性空间中信号子空间和噪声子空间相互正交为依据进行方位角估计。对 ULA 中  $M$  个阵元的输出信号  $\mathbf{X}(t)$  进行  $L$  个等间隔采样,采样输出为  $X(M, L)$ ,其协方差矩阵为<sup>[6,7]</sup>

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^H\} = \mathbf{A}E\{\mathbf{S}\mathbf{S}^H\}\mathbf{A}^H + E\{\mathbf{N}\mathbf{N}^H\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_N \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{R}_s$ 、 $\mathbf{R}_N$  为信号协方差矩阵和噪声协方差矩阵,对噪声功率为  $\sigma^2$  的白噪声,有

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_N = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (2)$$

当入射信号中存在同频相干时,自相关矩阵  $\mathbf{R}_s$  的秩小于入射信号的个数  $N$ ,它的秩为相干信号组的个数<sup>[8,9]</sup>,由于  $N$  维线性空间不存在  $N$  个基向量,噪声子空间与信号子空间不再正交,最小优化搜索无法得到入射信号方位角,这导致 MUSIC 算法失效。

### 3 变参考阵元算法描述及实现

本文提出的算法对入射信号方位角的估计包括三个步骤,第一阶段利用 DFT 估计入射信号数目  $\tilde{M}$ ,第二阶段利用变参考阵元重构信号功率矩阵,第三阶段利用前两步结果以及最小优化搜索得到入射方位角,算法流程如图 1 所示。

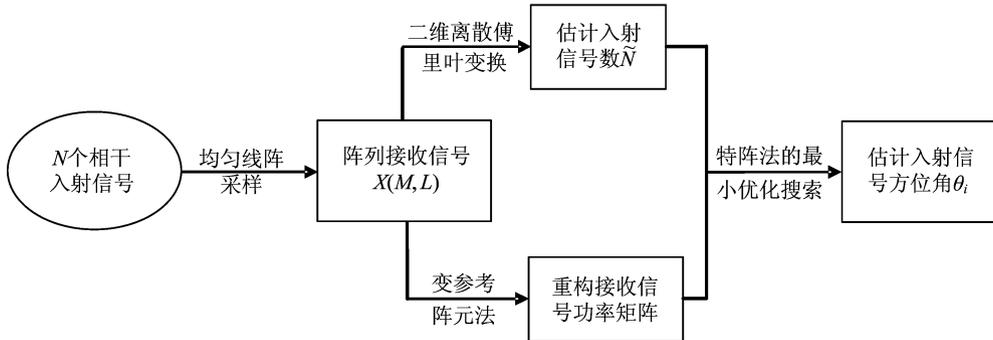


图 1 新算法实现流程图

Fig. 1 The Flow Chart of New Algorithm

#### 3.1 阵列信号 DFT<sup>[10]</sup>

对采样信号  $X(M, L)$  进行 2D-DFT,如下所示

$$X(p, q) \triangleq F[x(m, l)] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(m, l) e^{-j2\pi(\frac{m}{M}p + \frac{l}{L}q)} \\ = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(m, l) W_M^{mp} W_L^{lq} \quad (3)$$

$$0 \leq p \leq M - 1, 0 \leq q \leq L - 1$$

$[X(p, q)]$  称为  $[x(m, l)]$  的二维谱向量。由于  $X(M, L)$  中时间变量和空间变量是独立的,对它进行 2D-DFT 计算时,可以先将  $X$  矩阵各行进行 1D-DFT,再对各列进行 1D-DFT。根据 DFT 的原理可知,对  $X(M, L)$  各行进行 DFT 得到接收信号频谱,对各列进行 DFT 得到信号空间谱<sup>[8]</sup>,只要信号的入射方位角不同,就可以从空间谱的谱峰数获知入射信号数目。

为方便讨论,计算中所采用噪声是均值为零的高斯白噪声,且入射信号的功率相同。以 8 个信噪比均

为 0dB,其中 4 个载频为 200kHz,相位为  $-35^\circ$ 、 $-25^\circ$ 、 $25^\circ$ 、 $35^\circ$ ,4 个载频为 300kHz,相位为  $-35^\circ$ 、 $-25^\circ$ 、 $25^\circ$ 、 $35^\circ$  的入射信号为例,对它进行 2D-DFT,得到结果如图 2 所示

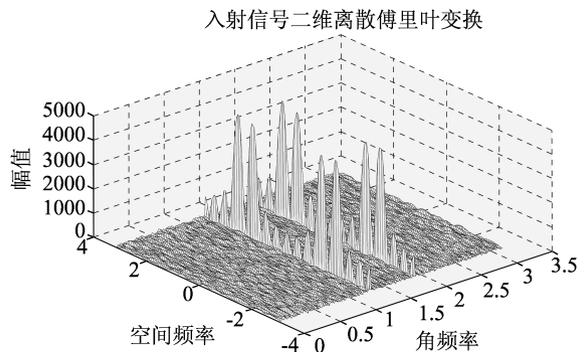


图 2 信号的二维离散傅里叶变换

Fig. 2 2D-DFT of Received Signals

假设噪声与信号功率相等,即信号噪声比为 0dB,傅里叶变换后噪声功率分布在空间角频带内,而信号功率集中在入射角频带附近。因此,频谱幅度中噪声所占比例很小。为了便于识别,在图 2 中频谱幅度为最高谱峰的一半以上为信号谱,其他为噪声谱。沿角频率方向有两个峰值,表示有两个不同载频,沿空间谱方向有 4 个峰值,表示在两个载频上均有 4 个空间谱,因此,从空间谱峰个数可得出入射信号个数为 8。

在入射信号方位角估计中,只要入射信号的方位角不同,无论载频是否相同,都当做不相关信号,如此便消除了频率相关性对阵列测向的影响,同时不破坏方位角的信息。对  $X(M, L)$  的每一列进行 DFT 并对得到的结果求平均得到空间频谱,即关于入射角的空间频率分布图。以 6 个人射方位角分别为  $-45^\circ$ 、 $-35^\circ$ 、 $-25^\circ$ 、 $25^\circ$ 、 $35^\circ$ 、 $45^\circ$ ,载频为 100kHz 的正弦波入射到 ULA 为例,通过 DFT 得到信号空间频谱如图 3 (由于空间采样点过少,对空间采样点先零值插值在进行 DFT,根据 DFT 理论可知这不影响空间频谱分布)。

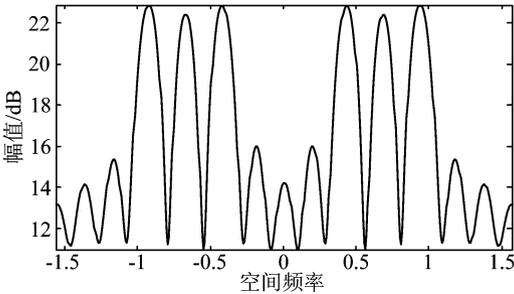


图 3 入射信号空间谱

Fig. 3 The Spatial Spectrum of Incident Signals

从上图中可以清晰得到 6 个空间频率,即需要估计的方位角数目为 6。

### 3.2 变参考阵元法

以 ULA 的第一个阵元为参考得到接收矩阵  $X_1(M, L)$ ,再以第二个阵元为参考得到第二个接收矩阵  $X_2(M, L)$ ,如此一直到以第  $M$  个阵元为参考得到第  $M$  个接收矩阵  $X_M(M, L)$ 。变参考阵元法过程如图 4 所示:

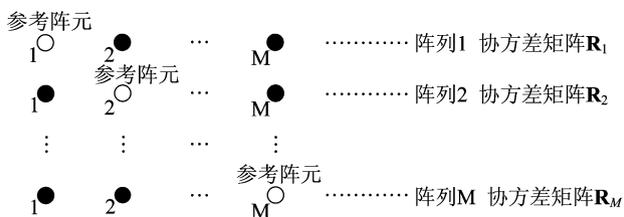


图 4 变参考阵元法示意图

Fig. 4 The sketch map of shift reference sensor

以第  $k$  个阵元为参考得到接收矩阵表达式如式 (4) 所示<sup>[7]</sup>

$$X_k(M, L) = \mathbf{A}\mathbf{D}^{(k-1)}\mathbf{S}(L) + \mathbf{N}(L) \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left\{ e^{-j\frac{\omega_0}{c}\Delta \cdot \sin\theta_1} \quad \cdots \quad e^{-j\frac{\omega_0}{c}\Delta \cdot \sin\theta_N} \right\} \quad (5)$$

重构协方差矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}_s$  如式 (5) 所示

$$\tilde{\mathbf{R}}_s = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{R}_k \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{A}\mathbf{D}^{(k-1)}\mathbf{R}_s(\mathbf{D}^{(k-1)})^H\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (7)$$

代表以第  $k$  个阵元为参考得到的协方差矩阵。

如果  $\tilde{\mathbf{R}}_s$  为满秩矩阵,就可以利用它进行相干信号的 DOA 估计。若信号为  $N$  个全相干信号,显然信号协方差矩阵  $\mathbf{R}_s$  的秩为 1,可以把  $\mathbf{R}_s$  用一个矢量来表示<sup>[7]</sup>

$$\mathbf{R}_s = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^H \quad (8)$$

式中  $\boldsymbol{\alpha}$  为一个行向量,  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N$  为该向量的各个分量。利用上式可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_s &= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{D}^{(k-1)} \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^H \mathbf{D}^{-(k-1)} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\mathbf{D}^{(k-1)} \boldsymbol{\alpha})^H \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{C}\mathbf{C}^H \end{aligned} \quad (9)$$

这里:

$$\mathbf{C} = [\boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{D}\boldsymbol{\alpha} \quad \cdots \quad \mathbf{D}^{M-1}\boldsymbol{\alpha}] \quad (10)$$

显然,  $\tilde{\mathbf{R}}_s$  的秩和矩阵  $\mathbf{C}$  的秩相等,矩阵  $\mathbf{C}$  可表示为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1 e^{-j\frac{\omega_0}{c}\Delta \cdot \sin\theta_1} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1 e^{-j\frac{\omega_0}{c}(M-1)\Delta \cdot \sin\theta_1} \\ \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2 e^{-j\frac{\omega_0}{c}\Delta \cdot \sin\theta_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2 e^{-j\frac{\omega_0}{c}(M-1)\Delta \cdot \sin\theta_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_N & \boldsymbol{\alpha}_N e^{-j\frac{\omega_0}{c}\Delta \cdot \sin\theta_N} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_N e^{-j\frac{\omega_0}{c}(M-1)\Delta \cdot \sin\theta_N} \end{bmatrix} \quad (11)$$

如果所有信号来自不同方向,则  $\mathbf{C}$  是满秩矩阵,因而  $\tilde{\mathbf{R}}_s$  也是满秩矩阵。即

$$\text{Rank}(\tilde{\mathbf{R}}_s) = \text{Rank}(\mathbf{C}) = \min(M, N) \quad (12)$$

经过上述修正后,利用 MUSIC 算法对  $\tilde{\mathbf{R}}_s$  特征值分解并在  $[-90^\circ, 90^\circ]$  内进行最小优化搜索,便可以估计出

相干入射信号的方位角。

在实际信号处理中,只要得到以第一个阵元为参考的接收数据,其他  $M-1$  组数据可以通过如下方法得到

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^N e^{-j\frac{\omega_0}{c}((k-l)\Delta \cdot \sin\theta_i)} s_k(t) \quad l = 1, 2 \dots M \quad (13)$$

即以第  $l$  个阵元为参考得到的信号数组为

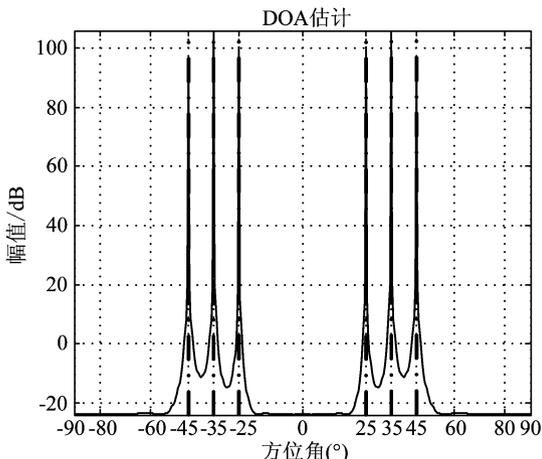
$$\mathbf{X}_l(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_l \mathbf{S}(t)$$

$$= \exp \left\{ -j \frac{\omega_0 \sin \theta_i}{c} \cdot \Delta \begin{bmatrix} (1-l) & (1-l) & \dots & (1-l) \\ (2-l) & (2-l) & \dots & (2-l) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (M-l) & (M-l) & \dots & (M-l) \end{bmatrix} \right\}$$

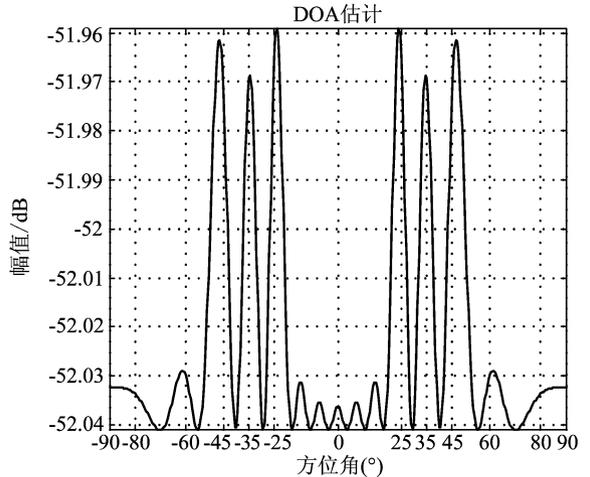
$$\begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_N(t) \end{bmatrix} \quad l = 1, 2 \dots M \quad (14)$$

第  $l$  组数据只需将第一组数据中的第 1 行至  $M-l$  行数据移至新数据的  $l+1$  至  $M$  行,第  $l$  行至第 1 行的数据的共轭移至新数据矩阵的第 1 至  $l$  行即可。

利用参考阵元法对上例中 6 个人射方位角分别为  $-45^\circ$ 、 $-35^\circ$ 、 $-25^\circ$ 、 $25^\circ$ 、 $35^\circ$ 、 $45^\circ$ ,载频为 200kHz 的正弦波信号进行计算,其结果如图 5 (a) 所示;利用经典 MUSIC 对这些入射进行 DOA 估计结果如图 5 (b) 所示。通过对比可知,变参考阵元法可以精确的确定相干入射信号的方位角,而经典 MUSIC 估计误差较大,且方位角的估计值完全淹没在噪声中(它们的幅值差比超过 0.1dB)。



(a) 变参考阵元法对相干信号的DOA估计



(b) 经典MUSIC对相干信号的DOA估计

图 5 相干信号入射角估计

Fig. 5 Estimation of Arrival Angles of Coherent Signals

## 4 新算法特点描述

### 4.1 保持阵列有效口径<sup>[11]</sup>

空间平滑算法受到子阵列所含阵元数的影响降低了阵列有效口径,对于 16 阵元阵列,通常只能估计入射信号数小于 8 的情况,变参考阵元法不进行阵元划分,提高了阵列的有效口径,其最大估计入射信号数等于阵列阵元数。下面以 16 阵元计算 12 个人射信号为例,其中入射信号信噪比为 0dB,入射方位角为  $-63^\circ$ 、 $-51^\circ$ 、 $-39^\circ$ 、 $-28^\circ$ 、 $-17^\circ$ 、 $-5^\circ$ 、 $6^\circ$ 、 $17^\circ$ 、 $29^\circ$ 、 $40^\circ$ 、 $51^\circ$ 、 $63^\circ$ ,载频都是 200kHz。入射信号的空间谱如图 6 所示

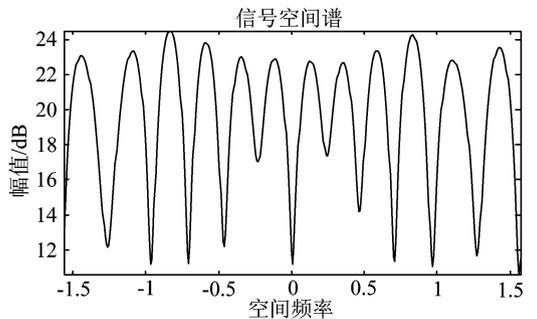


图 6 12 个相干信号的空间频谱

Fig. 6 The Spatial Spectrum of 12 Coherent Signals

从图 6 中可知入射信号数目估计值  $\tilde{M} = 12$ 。在  $[-90^\circ, 90^\circ]$  范围内进行谱峰搜索,得到结果如图 7 所示

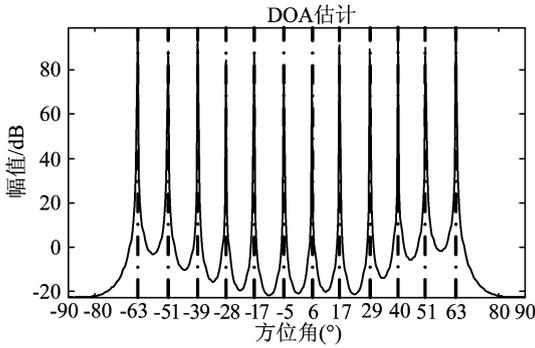


图7 高度相干信号入射角估计

Fig. 7 Estimation of Incident Angles of Coherent Signals

从图中可以看出,对于高度相干的12个入射信号,该算法确实给出了正确的分辨且阵列有效口径有所提高。

#### 4.2 信噪比与分辨率关系

该算法的另一优点是在低信噪比条件下仍然能对入射信号做出较精确的测向,以16阵元计算3个入射信号为例,入射方位角为 $0^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $50^\circ$ ,载频均为100KHz。考虑在不同信噪比下的测向情况,从图8中可知,在信噪比为-6dB时仍能够做出估计,随着信噪比增加,谱峰越来越尖锐,方位角的估计值越来越精确。

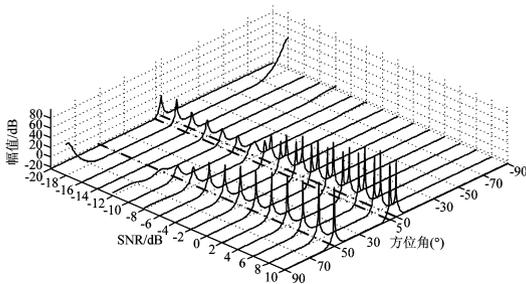


图8 低信噪比测向性能分析

Fig. 8 Analysis of Direction Finding in Low SNR

#### 4.3 分辨率与阵元数关系

阵列分辨率与阵列中的阵元数目有着密切联系,若入射信号信噪比为0dB,以2个方位角为 $5^\circ$ ,  $8^\circ$ ,载频为100KHz的信号为例进行仿真,结果如图9中所示。从图中可知,当阵元数目小于32时,无法对靠近的两信号作出估计,随着阵元数目增加,阵列分辨率逐渐提高。在实际设计阵列及应用时,为了得到可靠分辨率,必须选择适当信噪比和阵元数目。

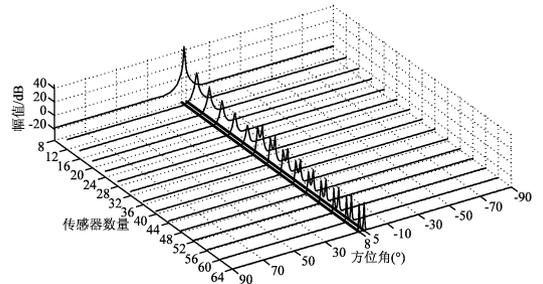


图9 分辨率与阵元数关系

Fig. 9 Relations between Resolution and Sensor Number

## 5 结论

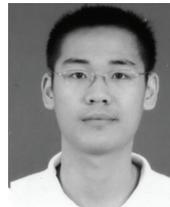
利用DFT可以得到入射信号的频谱以及空间谱,对于相干及不相干入射信号都能估计其个数,它比常规求解方法更为精确且能够在低信噪比下进行估计。入射信号方位角的估计受阵元个数影响,阵元数目越多,估计越准确。由于该算法不涉及阵列划分,它比空间平滑算法有着更高的有效孔径。本文在分析相干信号的高分辨率测向的基础上,利用DFT解决了信号数目估计问题,并指出了入射信号方位角估计中去相干的实质为去除载频影响这一原理,最后利用变参考阵元法重建信号功率矩阵,实现相干信号的高分辨率测向。该算法不但提高了分辨率,还保持阵列的有效口径。

## 参考文献

- [1] Krim H, Viberg M. Two decades of array signal processing research. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1996, 13(4): 67-94.
- [2] R. O. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1986, 34(3): 276-280.
- [3] 陈辉,王永良. 基于空间平滑的矩阵分解算法. *信号处理*, 2002, 24(8): 324-327.  
Chen H, Wang Y L. The algorithm of matrix factorization based on spatial smoothing. *Signal Processing*, 2002, 24(8): 324-327. (in Chinese)
- [4] DimaKhaykin, BoazRafaely. Coherent signals direction-of-arrival estimation using a spherical microphone array: frequency smoothing approach. *IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, 2009.
- [5] 孙超,李斌著. 加权子空间拟合算法理论与应用. 西安:西北工业大学出版社,1994.7.

- Sun C, Li B. The theory and application of the algorithm of weighted subspace fitting. Xi'an: NWPU Press (Northwestern Polytechnical University Press), July, 1994. (in Chinese)
- [6] 王永良, 陈辉等著. 空间谱估计理论与算法, 北京: 清华大学出版社, 2004. 11.  
Wang Y L, Chen H. The theory and algorithm of spatial spectrum estimation. Peking: Tsinghua University Press, November, 2004. (in Chinese)
- [7] 穆世强. 相干信号源的高分辨率阵列测向原理. 电子对抗技术, 1992, 8.  
Mu S Q. The high-resolution direction finding of coherent signal sources. UESTC (University of Electronic Science and Technology of China), August, 1992. (in Chinese)
- [8] Ye Z, Zhang Y, Liu C. Direction-of-arrival estimation for uncorrelated and coherent signals with fewer sensors. IET Microw. Antennas Propag., 2009, 3(3): 473-482.
- [9] Md. Bakhar, Dr. Vani. R. M, Dr. P. V. Hunagund. Eigen Structure Based Direction of Arrival Estimation Algorithms for Smart Antenna Systems. IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security, 2009, 9(11).
- [10] 张贤达著. 现代信号处理. 北京: 清华大学出版社, 2002.  
Zhang X D. Modern signal processing. Peking: Tsinghua University Press, 2002. (in Chinese)
- [11] 黄可生, 黄知涛, 周一宇. 基于信号子空间抽取的 DOA 估计. 信号处理, 2003, 19(6): 576-579.  
Huang K S, Huang Z T, Zhou Y Y. Estimation DOA based on signal subspace extraction. Signal Processing, 2003, 19(6): 576-579. (in Chinese)

#### 作者简介



林 亭,男,国防科技大学光电科学与工程学院硕士研究生,主要从事水声信号处理研究。

E-mail: lt8901@sina.com

曾新吾,男,博士,教授,国防科技大学光电科学与工程学院博士生导师。

孙海洋,男,博士,国防科技大学光电科学与工程学院讲师。