

一种基于最大似然概率准则的迭代 DDF 算法

辛 勤 吴顺华

(国防科技大学 电子科学与工程学院一所信号处理室, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 随着定位跟踪技术的不断发展, 非线性滤波逐渐成为研究的重点和实现非线性定位跟踪的关键。DDF 算法是一种基于 stirling 内插公式的非线性插值滤波算法, 在系统的可观测度较低且测量误差通常较大时, 其跟踪滤波的收敛速度、精度和稳定性都不高。在推导了最大似然概率迭代策略的基础上, 提出基于最大似然准则的 IDDF 滤波算法。该方法迭代过程以似然概率增加为准则, 改善了跟踪滤波精度和收敛速度。仿真实验表明, 与 EKF 和 DDF 相比, IDDF 具有更高的估计精度和更快的收敛速度。

关键词: 非线性滤波; 差分滤波; 迭代差分滤波; 最大似然概率

中图分类号: TN911.7 TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 1003-0530(2010)07-1033-06

A Novel Iterated DDF Algorithm Based on Maximum Likelihood Probability

XIN Qin WU Shun-hua

(Signal Processing Lab., Institute 1, College of Electronic Science and Engineering,
National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: With the development of the location and tracking technology, the nonlinear filtering is becoming the research emphasis, which is the key to realize the nonlinear location and tracking. DDF is a nonlinear interpolation filtering algorithm based on stirling interpolation formula. When the system observability is weak and the observation error is large, the convergence speed, accuracy and stability of DDF are inferior. A novel iterated DDF (IDDF) is proposed by introducing the maximum likelihood probability iterated means into DDF. Since the likelihood probability is always increased in the iterated process of IDDF, its tracking accuracy and convergence speed are improved. Simulations are designed and carried out. The results indicate that, compared with EKF and DDF, higher accuracy of estimation and faster convergence are obtained using IDDF.

Key words: nonlinear filtering; divided difference filtering; iterated DDF; maximum likelihood probability

1 引言

随着滤波跟踪理论的发展, 非线性滤波跟踪在越来越多的实践中得到运用。由于非线性问题的复杂性, 随机变量经非线性变换后的分布密度函数通常很难得到, 因此难以得到最优滤波估计, 实际情况中都是通过最优非线性滤波器进行合理的近似得到的一些次优解。寻求非线性问题次优滤波的方法有很多, 其中有一类方法是基于这样一种近似思路: 通过函数解析的方式对非线性方程进行近似, 然后线性化并按照线性系统进行滤波。这类基于函数解析近似的非线性滤波中最经典就是扩展卡尔曼滤波^[1,2] (EKF: Extended Kalman Filtering)。EKF 就是将非线性方程利

用 Taylor 级数展开并线性化近似, 使系统适应 Kalman 滤波的要求。在过去的三四十年间, EKF 已被广泛应用于实际的非线性滤波问题。然而, 当应对强非线性系统时, EKF 常常难以调节, 有时甚至发散。工程应用表明, EKF 只有在满足局部线性化条件下才是可靠的。

系统方程的一阶 Taylor 近似给跟踪滤波算法带来以下问题: 首先, 系统方程近似带来的误差将影响算法的精度, 并使估计有偏, 且较易发散; 其次, 当非线性方程非常复杂时, 系统方程求导 (Jacobian 或 Hessian 矩阵) 的解析表达式无法得到。这限制了 EKF 算法的性能和适用范围。针对这两个问题, 文献^[3,4] 提出了一种基于 Stirling 插值 (等距节点差分插值公式的一种) 的

差分滤波算法 DDF (Divided Difference Filtering): 用中心插值将非线性系统方程多项式展开并取有限项作为近似, 然后根据非线性滤波的一般理论得到具体算法。与 EKF 算法相比, DDF 算法的收敛精度、速度以及稳定性都有不同程度的提高^[3], 同时, 由于 DDF 算法不用计算 Jacobian 或 Hessian 矩阵, 比较容易实现。但是, 在的系统可观测度较低且测量误差通常较大的应用背景中, 标准 DDF 算法也存在反应速度慢、收敛精度和稳定性不高的问题。

另一方面, 由 IEKF 算法可知, 将迭代方法与滤波算法相结合, 可能使得滤波性能得到较大改善^[5]。但如何选择迭代策略至关重要。从理论上讲, IEKF 的迭代过程具有全局收敛性^[6], 其性能必定较 EKF 和 MVEKF 更优。然而, 研究^[7,8]表明, 在实践应用中并非如此: 由于实际应用中观测误差较大, 并且系统的非线性模型通常也不如理论分析的那么简单, IEKF 的滤波效果并不总是优于 EKF。特别是当观测误差较大时, 不但达不到改善滤波性能的目的, 相反会导致滤波效果严重恶化^[8]。这种现象的原因在于 IEKF 算法的迭代策略: 将当前时刻状态和上一时刻状态的差与固定门限相比较来判断迭代是否继续^[6,8], 这种对状态量修正的方式完全依赖于当前观测值, 而忽略了似然概率对估计的指导作用, 因此, IEKF 对测量误差非常敏感。

针对上述问题, 本文在最大似然概率准则基础上寻求一种新的迭代策略, 并使之与 DDF 相结合, 得到一种新的迭代 DDF (IDDF: Iterative Divided Difference Filtering) 算法。

2 DDF 算法

设有非线性系统如下

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (2)$$

其中(1)式为系统状态方程, (2)式为观测方程。 \mathbf{x}_k 和 \mathbf{v}_k 为 n_x 维矢量, \mathbf{y}_k 和 \mathbf{w}_k 为 n_y 维矢量, \mathbf{v}_k 和 \mathbf{w}_k 是方差分别为 \mathbf{Q}_k 和 \mathbf{R}_k 的零均值高斯白噪声, 相互独立且与 k 时刻及以前状态量无关。分别将过程噪声和观测噪声与状态矢量组成增广状态量, 根据非线性函数中随机变量传递规律, 结合非线性滤波一般原理^[9]即可得差分滤波算法。

记 k 时刻状态预测值与滤波值分别为 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_k$, 方差为 $\hat{\mathbf{P}}_x(k)$ 和 $\hat{\mathbf{P}}_x(k)$, 并作如下 Cholesky 分解

$$\hat{\mathbf{P}}_x \triangleq \hat{\mathbf{S}}_x \hat{\mathbf{S}}_x^T, \hat{\mathbf{P}}_x \triangleq \hat{\mathbf{S}}_x \hat{\mathbf{S}}_x^T \quad (3)$$

其中, $\hat{\mathbf{S}}_x$ 代表 Cholesky 分解, $\hat{\mathbf{S}}_x$ 、 $\hat{\mathbf{S}}_x$ 在每个时刻分解得

到。用 $\hat{\mathbf{s}}_{x,p}$ 、 $\hat{\mathbf{s}}_{x,p}$ 分别表示 $\hat{\mathbf{S}}_x$ 、 $\hat{\mathbf{S}}_x$ 的第 p 列。给出四个差分矩阵如下

$$\mathbf{S}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}(k) = \{ \mathbf{S}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}(k)_{(i,j)} \} = \{ [f_i(\hat{\mathbf{x}}_k + h\hat{\mathbf{s}}_{x,j}) - f_i(\hat{\mathbf{x}}_k - h\hat{\mathbf{s}}_{x,j})] / (2h) \} \quad (4)$$

$$\mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}(k) = \{ \mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}(k)_{(i,j)} \} = \{ [g_i(\hat{\mathbf{x}}_k + h\hat{\mathbf{s}}_{x,j}) - g_i(\hat{\mathbf{x}}_k - h\hat{\mathbf{s}}_{x,j})] / (2h) \} \quad (5)$$

$$\mathbf{S}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}(k) = \{ \mathbf{S}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}(k)_{(i,j)} \} = \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h^2} [f_i(\hat{\mathbf{x}}_k + h\hat{\mathbf{s}}_{x,j}) + f_i(\hat{\mathbf{x}}_k - h\hat{\mathbf{s}}_{x,j}) - 2f_i(\hat{\mathbf{x}}_k)] \right\} \quad (6)$$

$$\mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}(k) = \{ \mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}(k)_{(i,j)} \} = \left\{ \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{2h^2} [g_i(\hat{\mathbf{x}}_k + h\hat{\mathbf{s}}_{x,j}) + g_i(\hat{\mathbf{x}}_k - h\hat{\mathbf{s}}_{x,j}) - 2g_i(\hat{\mathbf{x}}_k)] \right\} \quad (7)$$

则得标准 DDF 算法如下^[3]:

1) 初始化

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}[\mathbf{x}_0], \hat{\mathbf{P}}_x(0) = \mathbf{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]$$

2) 状态预测

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \frac{h^2 - n_x}{h^2} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_x} [f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + h\hat{\mathbf{s}}_{x,p}) + f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - h\hat{\mathbf{s}}_{x,p})] \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_x(k) = [\mathbf{S}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}(k-1) \quad \mathbf{S}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}(k-1)] \times [\mathbf{S}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}(k-1) \quad \mathbf{S}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}(k-1)]^T + \mathbf{Q}_{k-1} \triangleq \hat{\mathbf{S}}_x(k) \hat{\mathbf{S}}_x(k)^T \quad (9)$$

3) 观测预测

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \frac{h^2 - n_x}{h^2} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_k) + \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_x} [g(\hat{\mathbf{x}}_k + h\hat{\mathbf{s}}_{x,p}) + g(\hat{\mathbf{x}}_k - h\hat{\mathbf{s}}_{x,p})] \quad (10)$$

$$\mathbf{P}_y(k) = [\mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}(k) \quad \mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}(k)] \times [\mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}(k) \quad \mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}(k)]^T + \mathbf{R}_k \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_{xy}(k) = \hat{\mathbf{S}}_x(k) \left(\mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}(k) \right)^T \quad (12)$$

4) 状态滤波更新

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy}(k) \left(\mathbf{P}_y(k) \right)^{-1} \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k) \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_x(k) = [\hat{\mathbf{S}}_x(k) - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}(k) \quad \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}(k)] \times [\hat{\mathbf{S}}_x(k) - \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(1)}(k) \quad \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{x}}}^{(2)}(k)]^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k \quad (15)$$

$$\triangleq \hat{\mathbf{S}}_x(k) \hat{\mathbf{S}}_x(k)^T$$

3 最大似然概率迭代准则

考虑(1)、(2)式描述的非线性系统。若在 k 时刻得到状态估计为 $\hat{\mathbf{x}}_k$,误差方差矩阵为 $\hat{\mathbf{P}}_x(k)$,则可将 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 看作均值为 \mathbf{x}_k 方差矩阵为 $\hat{\mathbf{P}}_x(k)$ 的多维正态随机矢量的一个实现;同样将 k 时刻观测值 \mathbf{y}_k 看作均值为 $g(\mathbf{x}_k)$ 方差矩阵为 \mathbf{R}_k 的多维正态随机矢量的一个实现。在 k 时刻对状态量进行迭代滤波,就是在得到状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 和观测值 \mathbf{y}_k 的基础上寻求更优的状态估计,此时问题变为根据观测量 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 和 \mathbf{y}_k 对参数 \mathbf{x}_k 的估计问题。为了分析的方便,用变量 χ 代替 \mathbf{x}_k 表示待估计参数,则合并后的观测量为

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\chi) + \mathbf{w}_k \\ \chi + \boldsymbol{\eta}_k \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_k$ 为方差为 $\hat{\mathbf{P}}_x(k)$ 的零均值高斯白噪声,则有

$$\mathbf{z}_k \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} g(\chi) \\ \chi \end{bmatrix}, \mathbf{S} \right) \quad (17)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{P}}_x(k) \end{bmatrix}$$

利用观测量 \mathbf{z}_k ,根据最大似然估计准则,可建立关于待估计参数 χ 的似然函数 $\Lambda(\chi)$,为

$$\Lambda(\chi) = C_\Lambda \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\mathbf{z}_k - \begin{bmatrix} g(\chi) \\ \chi \end{bmatrix} \right)^T \right. \quad (18)$$

$$\left. \mathbf{S}^{-1} \left(\mathbf{z}_k - \begin{bmatrix} g(\chi) \\ \chi \end{bmatrix} \right) \right\}$$

其中 C_Λ 为常数系数。则参数 χ 的最大似然估计 χ_{ml} 满足

$$\Lambda(\chi_{ml}) = \max [\Lambda(\chi)] \quad (19)$$

令

$$\psi(\chi) = \left(\mathbf{z}_k - \begin{bmatrix} g(\chi) \\ \chi \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{S}^{-1} \left(\mathbf{z}_k - \begin{bmatrix} g(\chi) \\ \chi \end{bmatrix} \right) \quad (20)$$

则(19)式等价于

$$\psi(\chi_{ml}) = \min [\psi(\chi)] \quad (21)$$

通过(21)式直接求解 χ_{ml} 是不容易实现的,但是如果两个值 χ_{i+1} 和 χ_i 满足

$$\psi(\chi_{j+1}) < \psi(\chi_j) \quad (22)$$

那么可以从似然概率的角度认为 χ_{j+1} 比 χ_j 更优,更接近最优解 χ_{ml} 。将(20)代入上式并展开得到

$$\begin{aligned} & [\mathbf{y}_k - g(\chi_{j+1})]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\mathbf{y}_k - g(\chi_{j+1})] + \\ & (\hat{\mathbf{x}}_k - \chi_{j+1})^T \hat{\mathbf{P}}_x(k)^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \chi_{j+1}) \\ & < [\mathbf{y}_k - g(\chi_j)]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\mathbf{y}_k - g(\chi_j)] + \\ & (\hat{\mathbf{x}}_k - \chi_j)^T \hat{\mathbf{P}}_x(k)^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \chi_j) \end{aligned} \quad (23)$$

在 k 时刻的迭代滤波中,将首次估计得到的状态记为 $\hat{\mathbf{x}}_{k,0} \triangleq \hat{\mathbf{x}}_k$,方差矩阵记为 $\hat{\mathbf{P}}_{x,0}(k) \triangleq \hat{\mathbf{P}}_x(k)$,第 j 次迭代估计得到的状态和方差记为 $\hat{\mathbf{x}}_{k,j}$ 和 $\hat{\mathbf{P}}_{x,j}(k)$ 。第 $j+1$ 次迭代是在 $\hat{\mathbf{x}}_{k,j}$ 的基础上进行的,即此时观测值为 $\mathbf{z}_k = [\mathbf{y}_k^T \quad \hat{\mathbf{x}}_{k,j}^T]^T$ 。则上式为

$$\begin{aligned} & [\mathbf{y}_k - g(\chi_{j+1})]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\mathbf{y}_k - g(\chi_{j+1})] + \\ & (\hat{\mathbf{x}}_{k,j} - \chi_{j+1})^T \hat{\mathbf{P}}_{x,j}(k)^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{k,j} - \chi_{j+1}) \\ & < [\mathbf{y}_k - g(\chi_j)]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\mathbf{y}_k - g(\chi_j)] + \\ & (\hat{\mathbf{x}}_{k,j} - \chi_j)^T \hat{\mathbf{P}}_{x,j}(k)^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{k,j} - \chi_j) \end{aligned} \quad (24)$$

若令 $\chi_j = \hat{\mathbf{x}}_{k,j}, j=0,1,2,\dots$,即 χ_j 由迭代产生,则上式变为

$$\begin{aligned} & (\hat{\mathbf{x}}_{k,j} - \hat{\mathbf{x}}_{k,j+1})^T \hat{\mathbf{P}}_{x,j}(k)^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{k,j} - \hat{\mathbf{x}}_{k,j+1}) + \\ & [\mathbf{y}_k - g(\hat{\mathbf{x}}_{k,j+1})]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\mathbf{y}_k - g(\hat{\mathbf{x}}_{k,j+1})] \\ & < [\mathbf{y}_k - g(\hat{\mathbf{x}}_{k,j})]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\mathbf{y}_k - g(\hat{\mathbf{x}}_{k,j})] \end{aligned} \quad (25)$$

上式就是根据最大似然估计得到的迭代准则。

4 基于最大似然概率准则的IDDF算法

仍考虑(1)、(2)式描述的非线性系统,根据(25)式的迭代准则,以二阶DDF为例,得到IDDF算法步骤如下:

1) 初始化

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}[\mathbf{x}_0], \hat{\mathbf{P}}_x(0) = \mathbf{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T], k=0, \lambda=0.8, \kappa_g=1, j_{\max}=5$$

2) 状态预测

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{P}}_x(k) \triangleq \hat{\mathbf{S}}_x \hat{\mathbf{S}}_x^T \\ & k = k + 1, j = 0 \\ & \hat{\mathbf{x}}_k = \frac{h^2 - n_x}{h^2} f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_x} [f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + h\hat{\mathbf{s}}_{x,p}) + f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - h\hat{\mathbf{s}}_{x,p})] \\ & \mathbf{S}_{xx}^{(1)}(k-1) = \{ \mathbf{S}_{xx}^{(1)}(k-1)_{(p,q)} \} \\ & = \{ [f_p(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + h\hat{\mathbf{s}}_{x,q}) - \\ & f_p(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - h\hat{\mathbf{s}}_{x,q})] / (2h) \} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x}}^{(2)}(k-1) &= \{ \mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x}}^{(2)}(k-1)_{(p,q)} \} \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{h^2-1}}{2h^2} [f_p(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + h\hat{\mathbf{s}}_{x,q}) + \right. \\ &\quad \left. f_p(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - h\hat{\mathbf{s}}_{x,q}) - 2f_p(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})] \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_x(k) &= [\mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)}(k-1) \quad \mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x}}^{(2)}(k-1) \\ &\quad [\mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x}}^{(1)}(k-1) \quad \mathbf{S}_{\hat{x}\hat{x}}^{(2)}(k-1)]^T + \mathbf{Q}_{k-1} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &\triangleq \hat{\mathbf{S}}_x(k) \hat{\mathbf{S}}_x(k)^T \\ \hat{\mathbf{x}}_{k,j} &= \hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\mathbf{P}}_{x,j}(k) = \hat{\mathbf{P}}_x(k) \triangleq \hat{\mathbf{S}}_x(k) \hat{\mathbf{S}}_x(k)^T \end{aligned} \quad (30)$$

3) 观测预测

$$\hat{\mathbf{y}}_{k,j} = \frac{h^2 - n_x}{h^2} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k,j}) + \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2h^2} \sum_{p=1}^{n_x} [\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k,j} + h\hat{\mathbf{s}}_{x,p}) + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k,j} - h\hat{\mathbf{s}}_{x,p})] \\ \mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(1)}(k) &= \{ \mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(1)}(k)_{(p,q)} \} \\ &= \{ [\mathbf{g}_p(\hat{\mathbf{x}}_{k,j} + h\hat{\mathbf{s}}_{x,q}) - \mathbf{g}_p(\hat{\mathbf{x}}_{k,j} - h\hat{\mathbf{s}}_{x,q})] / (2h) \} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(2)}(k) &= \{ \mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(2)}(k)_{(p,q)} \} \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{h^2-1}}{2h^2} [\mathbf{g}_p(\hat{\mathbf{x}}_{k,j} + h\hat{\mathbf{s}}_{x,q}) + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{g}_p(\hat{\mathbf{x}}_{k,j} - h\hat{\mathbf{s}}_{x,q}) - 2\mathbf{g}_p(\hat{\mathbf{x}}_{k,j})] \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{y,j}(k) &= [\mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(1)}(k) \quad \mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(2)}(k)] \\ &\quad [\mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(1)}(k) \quad \mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(2)}(k)]^T + \mathbf{R}_k \end{aligned} \quad (34)$$

$$\mathbf{P}_{xy,j}(k) = \hat{\mathbf{S}}_x(k) \left(\mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(1)}(k) \right)^T \quad (35)$$

4) 状态更新滤波

$$\mathbf{K}_{k,j} = \mathbf{P}_{xy,j}(k) \left(\mathbf{P}_{y,j}(k) \right)^{-1} \quad (36)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,j+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k,j} + \kappa_g \mathbf{K}_{k,j} (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k,j}) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{x,j+1}(k) &= \hat{\mathbf{P}}_{x,j}(k) - \mathbf{K}_{k,j} \mathbf{P}_{y,j}(k) \mathbf{K}_{k,j}^T \\ &= [\hat{\mathbf{S}}_x(k) - \mathbf{K}_{k,j} \mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(1)}(k) \quad \mathbf{K}_{k,j} \mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(2)}(k)] \times \\ &\quad [\hat{\mathbf{S}}_x(k) - \mathbf{K}_{k,j} \mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(1)}(k) \quad \mathbf{K}_{k,j} \mathbf{S}_{\hat{y}\hat{y}}^{(2)}(k)]^T + \\ &\quad \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \end{aligned} \quad (38)$$

$$\triangleq \hat{\mathbf{S}}_x(k) \hat{\mathbf{S}}_x(k)^T$$

5) 迭代判断:若下式成立且 $j < j_{\max}$, 则 $j = j + 1, \kappa_g = \lambda \kappa_g$, 转至第3)步

$$\begin{aligned} &(\hat{\mathbf{x}}_{k,j} - \hat{\mathbf{x}}_{k,j+1})^T \hat{\mathbf{P}}_{x,j}(k)^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_{k,j} - \hat{\mathbf{x}}_{k,j+1}) + \\ &[\mathbf{y}_k - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k,j+1})]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\mathbf{y}_k - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k,j+1})] \\ &< [\mathbf{y}_k - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k,j})]^T \mathbf{R}_k^{-1} [\mathbf{y}_k - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}_{k,j})] \end{aligned} \quad (39)$$

6) 迭代终止, 令 $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k,j+1}, \hat{\mathbf{P}}_x(k) = \hat{\mathbf{P}}_{x,j+1}(k)$

7) 重复步骤2)~6)直至滤波跟踪结束。

上述算法中, λ 为衰减因子, 在0到1间取值, j_{\max} 为最大迭代次数限制。与传统的迭代方法相比, 上述IDDF算法在(39)式表示的迭代准则下能确保每次迭代都朝似然概率增加的方向进行, 这样就避免了观测误差大时观测值对迭代的误导。

上述提出的IDDF算法, 具有DDF算法和迭代方法的双重优势。由于DDF算法中采用的Stirling插值多项式近似的精度高于EKF算法中采用的泰勒多项式近似, DDF算法的精度通常高于EKF算法^[3]。IDDF算法在DDF算法基础上对滤波估计进行基于最大似然概率准则的迭代处理, 在迭代策略允许的范围内对每一时刻的滤波估计误差进一步修正。因此, IDDF算法的滤波收敛精度和速度要优于EKF算法和传统的DDF算法。就算法复杂度而言, IDDF算法是在DDF算法的基础上通过迭代得到, 如果平均迭代次数为 N , 则运算复杂度是DDF的 N 倍。考虑到系统噪声为加性时, DDF算法在的计算复杂度比EKF算法只略大, 因此, 只要 N 不过大, IDDF算法的计算复杂度与EKF算法仍在同一个数量级, 实现并不困难。实际上, 平均迭代次数 N 通常都在1.5至2之间。

5 仿真实验

为了验证上述推导的正确性和算法的有效性, 进行下面实验。

如图1是一个经典的非线性目标跟踪问题, 被广泛用于非线性滤波跟踪研究的仿真实验^[3,10,11]。目标 T 垂直下落, 高度为 x_1 , 下降速度为 x_2 , 目标弹道参数或系数(常数)为 x_3 , 这三者为待估计状态量。目标垂直落体系统的状态方程为

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t) + \nu_1(t) \quad (40)$$

$$\dot{x}_2(t) = -e^{-\gamma x_1(t)} x_2(t)^2 x_3(t) + \nu_2(t) \quad (41)$$

$$\dot{x}_3(t) = 0 + \nu_3(t) \quad (42)$$

其中 $\nu_1(t), \nu_2(t), \nu_3(t)$ 为零均值高斯噪声, 方差为 $\mathbf{Q}(t)$, 且相互不相关; $\gamma = 5 \times 10^{-5}$ 是表示空气密度与海拔高度间关系的常数。雷达 P 高度为 H , 雷达与目标的水平距离为 M , 测量得到的雷达到目标距离为 $z(t)$, 则观测方程为

$$z(t) = \sqrt{M^2 + [x_1(t) - H]^2} + w(t) \quad (43)$$

其中 $w(t)$ 是均值为零的观测噪声, 其方差为 $R(t)$ 。

上述模型中参数给定如下:

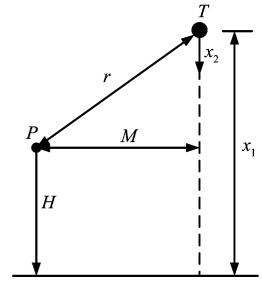


图1 垂直落体问题几何关系

$M = 100,000 \text{ m}$, $H = 100,000 \text{ m}$, $Q(t) = 0$, $R(t) = 10^4 \text{ m}^2$, 测量间隔周期为 1s, 系统初始状态真值为 $x_{1,0} = 300,000 \text{ m}$, $x_{2,0} = 20,000 \text{ m/s}$, $x_{3,0} = 10^{-3}$

由于过程模型的非线性特性和目标的高速运动, 考虑到精度, 对(40)~(42)式微分方程进行小步长的数值积分求解。根据文献^[3,10,11], 对过程模型运用 4 阶 Runge-Kutta 法进行数值积分, 步长为 1/64 秒。系统初始状态的估计值和方差为

$$\hat{x}_{1,0} = 300,000 \text{ m}, \hat{x}_{2,0} = 20,000 \text{ m/s}, \hat{x}_{3,0} = 3 \times 10^{-5}$$

$$\hat{P}(0) = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \times 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 \end{bmatrix}$$

分别运用 EKF、DDF 和 IDDF 三种算法进行跟踪滤波处理, 仿真取 $M = 100$ 次 Monte-Carlo 实验结果, 评价指标采用算法耗时 T_e 、各个状态量的平均误差绝对值 (Err) 和目标高度的误差均方根 (RMS)

$$Err_k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_k^i - \hat{x}_k^i) \quad (44)$$

$$RMS_k = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_k^i - \hat{x}_k^i)^2} \quad (45)$$

实验结果如图 2- 图 5 和表 1 所示。

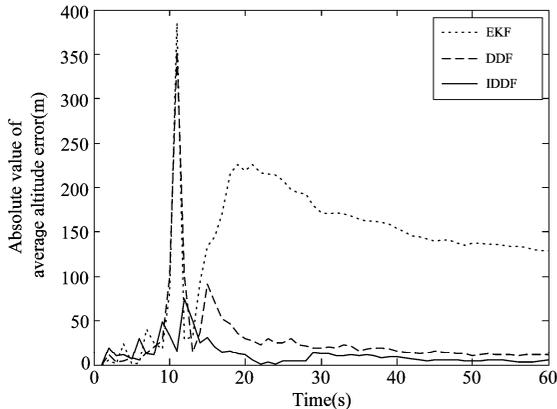


图 2 目标高度平均误差绝对值

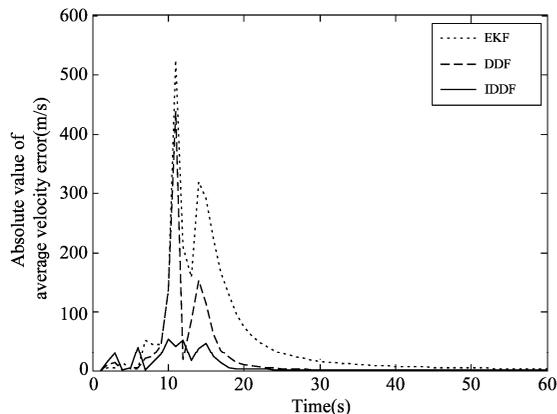


图 3 目标下降速度平均误差绝对值

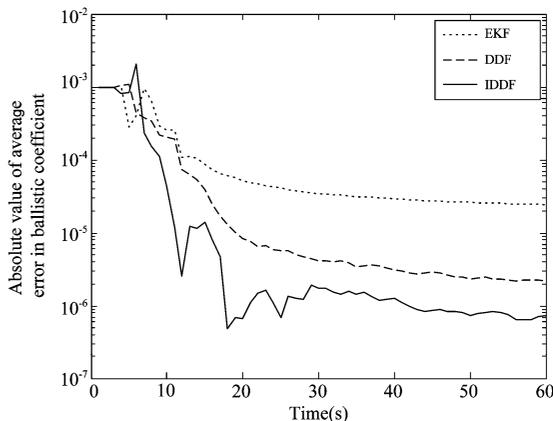


图 4 目标弹道系数平均误差绝对值

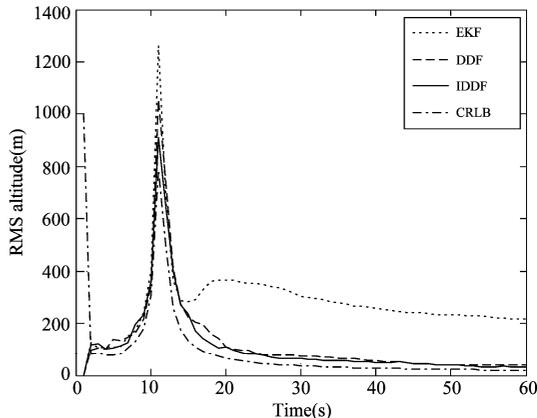


图 5 目标高度误差均方根

表 1 仿真结果评价指标对比

算法	收敛值				$T_e (s)$
	高度 $Err (m)$	速度 $Err (m/s)$	弹道系数 Err	高度 $RMS (m)$	
EKF	128.8	2.70	2.4×10^{-5}	215.5	3.57
DDF	10.7	0.21	2.2×10^{-6}	39.4	5.26
IDDF	3.2	0.08	7.4×10^{-7}	22.4	9.83

其中, 图 2、图 3 和图 4 分别为通过 100 次 Monte-Carlo 实验得到的目标高度、下降速度和弹道系数的平均误差绝对值曲线, 图 5 为通过 100 次 Monte-Carlo 实验得到的目标高度误差均方根曲线, 表 1 为相关评价指标的对比情况。根据上述仿真结果曲线和指标对比可知, DDF 算法的跟踪精度和收敛速度均优于 EKF 算法, 而 IDDF 算法的跟踪精度和收敛速度较 DDF 算法又有了更进一步地提高; 另外, IDDF 算法的耗时仅为 DDF 算法的 1.87 倍, 计算复杂度增加有限。由于本文提出的 IDDF 算法的迭代准则使迭代总是朝似然概率增加的方向进行, 克服了经典迭代算法对观测误差敏感的缺陷, 故 IDDF 算法表现出了良好的跟踪滤波性能。

6 结论

在非线滤波实际运用中,很多情况下系统可观测性较弱且观测误差较大,导致 DDF 算法滤波结果的误差较大,容易发散。针对加性噪声情况,根据最大似然准则,设计一种使似然概率增加的迭代策略并使之与 DDF 相结合,从而提出基于最大似然准则的迭代 DDF(IDDF)算法。与标准 DDF 算法和 EKF 算法相比, IDDF 具有更高的跟踪精度和更快的收敛速度。IDDF 的这一优势主要来自于两个方面:一是 DDF 比 EKF 的估计精度要高,二是因为迭代策略保证了滤波迭代的有效进行,从而获得更快的反应速度和收敛精度。

参考文献

- [1] 孙仲康,周一宇,何黎星. 单多基地有源无源定位技术[M]. 北京:国防工业出版社,1996.
- [2] Haykin S. Kalman Filtering and Neural Networks[M]. New York: Wiley, 2001.
- [3] Norgaard Magnus, Poulsen Niels K., Ravn Ole. New Developments in State Estimation for Nonlinear Systems[J]. Automatica, 2000, 36: 1627-1638.
- [4] Schei T. S. A Finite-Difference Method for Linearization in Nonlinear Estimation Algorithms [J]. Automatica, 1997, 33(11): 2053~2058.
- [5] 刘福声,罗鹏飞. 统计信号处理[M]. 长沙:国防科学技术大学出版社,1999.
- [6] Bell Bradley M., Cathey Frederick W. The Iterated Kalman Filter Update as a Gauss-Newton Method[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1993, 38(2): 294-297.

- [7] Guo Fucheng, Sun Zhongkang, Huangfu Kan. A Modified Covariance Extended Kalman Filtering Algorithm in Passive Location[A]. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics, Intelligent Systems and Signal Processing[C], 2003: 307-311.
- [8] 龚享铤. 利用频率变化率和波达角变化率单站无源定位与跟踪的关键技术研究[D]. 博士,国防科学技术大学,2004.
- [9] Lewis, F. L. Optimal Estimation[M]. New York: Wiley, 1986.
- [10] Athans M., Wishner R. P., Bertolini A. B. Suboptimal State Estimation for Continuous-Time Nonlinear Systems From Discrete Noisy Measurements[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1968, 13(5): 504-514.
- [11] Julier Simon, Uhlmann Jeffrey, Durrant-Whyte Hugh F. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariance in Filters and Estimators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.

作者简介



辛勤(1973-),男,生于南昌,2000年于国防科大获博士学位,副教授,研究方向为雷达信号处理。
E-mail:ym_xin@163.com

吴顺华(1982-),男,2009年于国防科大获博士学位,研究方向为雷达信号处理。