

# 已知波形信号的时差频差估计方法研究与性能分析

刘严\* 朱毅 张源 郭福成  
(国防科技大学电子科学学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 借助深入分析和长期积累,非合作定位系统可以获得关于电视、广播、导航等电磁信号波形的丰富先验信息,对这些信息加以利用有望大幅提高对信号参数的估计精度。该文针对导航、通信等欺骗干扰源及非法用户的无源定位需求,在观测站与辐射源之间存在相对运动的场景下,围绕已知波形信号开展时差频差估计问题研究。首先,通过引入已知的信号波形信息对观测站接收数据进行建模,直观呈现了观测数据与不同观测站信号相对于原始信号时延、频移的关系。随后,充分利用入射信号波形已知这一有利条件,通过估计两个观测站各自的时延和频移,并对不同观测站上的估计结果进行差分,提出了一种针对已知波形信号的双站时差、频差估计方法。在此基础上,该文分析了已知波形信号时差频差估计精度的理论下界,揭示了时差频差估计精度受观测站接收信号幅度等因素的影响情况,并进一步分析了双站时差频差估计精度与单通道时延、频移估计精度之间的关系。最后,借助仿真实验验证了论文所提出的时差频差估计方法在不同环境中的参数估计性能,以及信号波形先验信息的利用给时差频差参数估计精度带来的提升情况。仿真结果表明,在所设定的信号环境中,该文所提出的方法对低信噪比的适应能力比基于互模糊函数的传统方法增强了15 dB左右;当该方法的参数估计性能达到收敛之后,其时差频差估计精度与CRLB非常吻合。

**关键词:** 时差频差估计; 已知信号波形; 运动观测站; 互模糊函数; 克拉美-罗界(CRLB)

**中图分类号:** TN971 **文献标识码:** A **DOI:** 10.16798/j.issn.1003-0530.2024.02.007

**引用格式:** 刘严,朱毅,张源,等. 已知波形信号的时差频差估计方法研究与性能分析[J]. 信号处理, 2024, 40(2): 292-300. DOI: 10.16798/j.issn.1003-0530.2024.02.007.

**Reference format:** LIU Yan, ZHU Yi, ZHANG Yuan, et al. TDOA and FDOA estimation methods for signals with known waveforms and their performance analyses [J]. Journal of Signal Processing, 2024, 40(2): 292-300. DOI: 10.16798/j.issn.1003-0530.2024.02.007.

## TDOA and FDOA Estimation Methods for Signals with Known Waveforms and Their Performance Analyses

LIU Yan\* ZHU Yi ZHANG Yuan GUO Fucheng

(College of Electronic Science and Technology, National University of Defense Technology,  
Changsha, Hunan 410073, China)

**Abstract:** In-depth analysis and long-term accumulation can be used by non-cooperative positioning systems to obtain rich prior information about the waveforms of various electromagnetic signals such as those of television, radio, and navigation systems. The exploitation of this information is expected to significantly improve the signal-parameter estimation accuracy. This study focused on the time-difference-of-arrival (TDOA) problem and frequency-difference-of-arrival

收稿日期: 2023-02-08; 修回日期: 2023-08-05

\*通信作者: 刘严 liuyan01@nudt.edu.cn \*Corresponding Author: LIU Yan, liuyan01@nudt.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61901494)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61901494)

(FDOA) estimation of known waveform signals in the context of relative motion between the observation stations and emitter, aiming at providing a solution for the passive location problem of deception jamming for navigation and communication sources, as well as of illegal users. First, the data received at an observation station was modeled by introducing the known signal waveform information, and the relationships between the observed data and the time delays and frequency shifts of the signals of different observation stations relative to the original signal were visually presented. Then, taking full advantage of the known waveform of the incident signal, the TDOA and FDOA of two stations were effectively estimated by estimating the time delays and frequency shifts of the two stations, respectively, and then differentiating the estimates on different stations. On this basis, this study analyzed the theoretical lower bound of the estimation accuracy of the TDOA and FDOA parameters in this scenario, which revealed the influence of factors such as the received signal amplitude on the TDOA and FDOA estimation accuracies. The relationship between the estimation accuracies for the dual-station TDOA and FDOA values was also analyzed, along with the accuracies of the single-channel time delay and frequency shift estimates. Finally, the parameter estimation performances of the new method in different environments were verified using simulations. The simulation results showed that in the given signal environments, the adaptability of the new method to a low signal-to-noise ratio was approximately 15 dB higher than that of the traditional method based on the cross-ambiguity function; and when the parameter estimation performance of the new method reached convergence, its TDOA and FDOA estimation accuracies were very consistent with the theoretical lower bound given here.

**Key words:** time-difference-of-arrival (TDOA) and frequency-difference-of-arrival (FDOA) estimation; signals with known waveform; moving observers; cross-ambiguity function (CAF); Cramer-Rao lower bound (CRLB)

## 1 引言

无源定位问题广泛存在于电子侦察、海上救援等领域,具有应用范围广、技术性强等特点。常用的无源定位方法包括测向交叉定位、多站时差定位等<sup>[1-4]</sup>。当观测站与辐射源之间存在相对运动时,不同观测站接收信号的载频会有所差异,为无源定位提供了可用的频率多普勒信息。基于多站信号时差、频差的无源定位方法具有较高的定位精度,得到了很多的关注和研究<sup>[5-10]</sup>。已有成果主要集中在基于时频差的无源定位方法研究、性能分析和快速算法研究等方面。

无论用于辐射源定位的侦察站数量是两个还是多个,对两两侦察站之间的时差和频差进行高精度估计都是时频差定位方法的基本步骤。目前最常用的双站时差频差估计方法是基于观测信号互模糊函数(Cross-Ambiguity Function, CAF)的方法<sup>[11-14]</sup>。该方法是极大似然方法的一种近似实现方式,在未知信号波形的情况下,可以得到逼近克拉美-罗界(Cramer-Rao Lower Bound, CRLB)的参数估计精度<sup>[12-13]</sup>。但是,对于不同的信号模型,时差频差估计精度的CRLB是有显著区别的。文献[15]对比了平稳随机信号、未知确定信号和已知信号等不同条件下的时差频差估计CRLB,结果表明信号波形先验信息有助于大幅提高时差频差估计精度。

在很多实际应用中,待定位电子目标所辐射的

信号波形是先验已知的,例如对数字广播信号等民用目标的定位问题<sup>[16-19]</sup>。当已知波形的参考信号同时被多个运动接收站所截获时,会在观测信号中引入未知的幅度增益和时差、频差等因素,导致每个观测站侦收的信号都与原始参考信号之间存在差异。如何利用好参考信号波形的先验信息,并尽可能消除各种不确定性因素的影响,是针对已知波形信号实现时差频差估计和无源定位需要着重解决的问题。文献[8]基于信号波形先验已知的假设,推导了这种情况下时差频差估计的CRLB。但由于该成果侧重于比较电磁信号与水声信号时差频差估计问题的异同,对信号接收模型的描述有所简化,与实际应用场景存在一定偏差。

本文研究已知参考信号波形条件下的双站时差频差被动估计问题,提出相应的参数估计方法,并对参数估计精度的CRLB进行分析。该双站时差频差估计方法可推广应用于多站系统,随后通过联合多组时差频差估计值实现对辐射源位置的估计。在侦察信号建模过程中,借鉴文献[15]中的模型对运动接收站的时延和频移效应进行描述,从而将时差、频差参数与参考信号波形分离开来,使得接收站观测信号与已知的参考信号波形信息之间的关系更加直观可用。另外,通过把未知时差、频差参数与信号波形解耦合,在所得到的CRLB表达式中,各种模型因素的影响也能够更具体地分析。

全文共分为六部分。第二部分对双站接收信

号进行建模,第三部分提出已知波形信号时差频差估计方法,第四部分深入分析信号波形已知条件下时差、频差参数估计的CRLB,第五部分仿真验证新方法的性能,并与推导得到的CRLB进行对比,第六部分总结全文。

## 2 双站信号接收模型

假设一个电磁信号被两个侦察站同时截获,在观测时间内辐射源与观测站之间的相对位移可以忽略,同时假设观测过程中信道传播损耗、天线增益等参数保持恒定,则可以认为两个接收站的观测数据是在一个确定的几何构型条件下采集得到的。

两个接收站的观测数据分别为

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{s}_1 + \mathbf{u}_1 \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{s}_2 + \mathbf{u}_2 \quad (2)$$

其中 $\mathbf{s}_1$ 和 $\mathbf{s}_2$ 表示观测信号波形, $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 表示信号采集过程中混入的随机高斯噪声。记 $N$ 表示信号的采样点数,则式(1)和式(2)中各向量均存在于复数空间 $\mathbb{C}^{N \times 1}$ 中。

假设侦察信号的原始波形先验已知,记为 $\mathbf{s}_0$ ,两个接收站与辐射源之间相对运动造成的时差和频差分别为 $t_{d1}$ 和 $f_{d1}$ 、 $t_{d2}$ 和 $f_{d2}$ ,两个侦察站接收信号之间的时差和频差分别为 $t_d = t_{d2} - t_{d1}$ 和 $f_d = f_{d2} - f_{d1}$ 。在模型描述和算法提出过程中,为简化叙述,用时差和频差的变形形式 $\tau = t_d/T$ 和 $\nu = 2\pi f_d T$ 分别代替原始时差、频差两个物理量,其中 $T$ 表示信号采样间隔。为表述方便,直接将这两个参数描述为“时差”和“频差”。相应地,其他单站时差、频差变量也替换为对应的变形形式,即 $\tau_1 = t_{d1}/T$ , $\nu_1 = 2\pi f_{d1} T$ , $\tau_2 = t_{d2}/T$ , $\nu_2 = 2\pi f_{d2} T$ 。

假设入射信号带宽远小于载频,则可以采用群延迟形式近似表示两个接收站所采集的观测数据,即将原始信号波形从时域变换到频域之后进行相移,以描述信号时延的效果<sup>[15]</sup>,得到两个接收站上观测信号的具体形式为

$$\mathbf{s}_1 = a_1 e^{j\phi_1} \mathbf{D}_{v1} \mathbf{F}^H \mathbf{D}_{\tau1} \mathbf{F} \mathbf{s}_0 \quad (3)$$

$$\mathbf{s}_2 = a_2 e^{j\phi_2} \mathbf{D}_{v2} \mathbf{F}^H \mathbf{D}_{\tau2} \mathbf{F} \mathbf{s}_0 \quad (4)$$

其中 $a_1$ 和 $a_2$ 表示两个接收站的信号增益, $\phi_1$ 和 $\phi_2$ 分别表示两个接收站在采集信号时的初始相位, $\mathbf{D}_{v1} = \text{diag}\{\exp(j\nu_1 \mathbf{l})\}$ , $\mathbf{l} = [0, 1, \dots, N-1]^T$ , $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示将向量元素作为对角线元素所得到的矩阵, $\mathbf{D}_{v2} = \text{diag}\{\exp(j\nu_2 \mathbf{l})\}$ , $\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} \mathbf{l} \mathbf{l}^T\right)$ , $\mathbf{D}_{\tau1} = \text{diag}$

$$\left\{ \exp\left(-j \frac{2\pi\tau_1}{N} \mathbf{l}\right) \right\}, \mathbf{D}_{\tau2} = \text{diag}\left\{ \exp\left(-j \frac{2\pi\tau_2}{N} \mathbf{l}\right) \right\}, \text{上标}(\cdot)^T$$

和 $(\cdot)^H$ 分别表示转置和共轭转置运算。当信号相对带宽较大时,信号带宽内不同频率分量之间由频移造成的相移会有所不同,导致式(3)和式(4)中的信号表示形式存在一定的偏差。但是,对于实际应用中的各种常见信号,其相对带宽大多数都比较小,该偏差也可以忽略,因此本文沿用了这种近似的表示方法。

## 3 时差频差估计方法

由式(1)和式(2)不难看出,在假设信号片段 $\mathbf{s}_0$ 先验已知,的情况下,观测数据 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T$ 服从高斯分布,分布函数中的未知变量集为

$$\boldsymbol{\xi}_0 = [\mathbf{a}_0^T, \boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}_2^T]^T \quad (5)$$

其中, $\mathbf{a}_0 = [a_1, a_2]^T$ , $\boldsymbol{\theta}_1 = [\phi_1, \tau_1, \nu_1]^T$ , $\boldsymbol{\theta}_2 = [\phi_2, \tau_2, \nu_2]^T$ 。待估计参数的信息包含在向量 $\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1$ 中。观测数据 $\mathbf{x}$ 的分布函数为:

$$\mathbf{x} \sim \text{CN}(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_{2N}) \quad (6)$$

其中, $\text{CN}(\alpha, \beta)$ 表示均值为 $\alpha$ 、方差为 $\beta$ 的复高斯分布, $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 e^{j\phi_1} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 \\ a_2 e^{j\phi_2} \mathbf{Q}_2 \mathbf{s}_0 \end{bmatrix}$ , $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{D}_{v1} \mathbf{F}^H \mathbf{D}_{\tau1} \mathbf{F}$ , $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{D}_{v2} \mathbf{F}^H \mathbf{D}_{\tau2} \mathbf{F}$ , $\sigma^2$ 表示两个接收站上观测数据的噪声功率。本文假设两个接收站上的噪声功率相等,如果两者不相等,也可以遵循本文思路得到相应的时频差估计方法和性能分析结果。

由于两个接收站的观测噪声 $\mathbf{u}_1$ 与 $\mathbf{u}_2$ 相互独立,幅度 $a_1$ 与 $a_2$ 依赖于电磁信号到达两个接收站的距离和传播损耗等互不相关的因素,因此也相互独立。类似地,变量集 $\boldsymbol{\theta}_1$ 与 $\boldsymbol{\theta}_2$ 也相互独立。因此可将式(6)中的分布函数改写为:

$$p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \boldsymbol{\xi}_0; \mathbf{s}_0) =$$

$$p(\mathbf{x}_1 | \{a_1, \boldsymbol{\theta}_1\}; \mathbf{s}_0) p(\mathbf{x}_2 | \{a_2, \boldsymbol{\theta}_2\}; \mathbf{s}_0) \quad (7)$$

即优化 $\tau$ 和 $\nu$ 以最大化概率函数 $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \boldsymbol{\xi}_0; \mathbf{s}_0)$ 的问题可以分解为对 $\tau_1$ 与 $\nu_1$ 、 $\tau_2$ 与 $\nu_2$ 分别进行优化的两个子问题,实现过程为

$$\hat{\tau}_1, \hat{\nu}_1 = \max_{\tau_1, \nu_1} p(\mathbf{x}_1 | \{a_1, \boldsymbol{\theta}_1\}; \mathbf{s}_0) \quad (8)$$

$$\hat{\tau}_2, \hat{\nu}_2 = \max_{\tau_2, \nu_2} p(\mathbf{x}_2 | \{a_2, \boldsymbol{\theta}_2\}; \mathbf{s}_0) \quad (9)$$

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1, \hat{\nu} = \hat{\nu}_2 - \hat{\nu}_1 \quad (10)$$

由式(8)和式(9)分别估计两站时延、频移的过

程相同,以式(8)为例,该似然函数的具体形式为

$$p(\mathbf{x}_1 | \{a_1, \theta_1\}; \mathbf{s}_0) = (\pi\sigma^2)^{-N} \exp\left(-\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{s}_1\|_2^2\right) \quad (11)$$

将式(3)中 $\mathbf{s}_1$ 的表达式代入上式,得到 $\tau_1$ 与 $\nu_1$ 的估计式为

$$\hat{\tau}_1, \hat{\nu}_1 = \max_{\tau_1, \nu_1} \left| \mathbf{x}_1^H (\mathbf{D}_{\nu_1} \mathbf{F}^H \mathbf{D}_{\tau_1} \mathbf{F} \mathbf{s}_0) \right| \quad (12)$$

上述单通道时延、频移估计过程采用了与互模糊函数类似的实现方式。同样地,第二个观测站的时延、频移的估计式为

$$\hat{\tau}_2, \hat{\nu}_2 = \max_{\tau_2, \nu_2} \left| \mathbf{x}_2^H (\mathbf{D}_{\nu_2} \mathbf{F}^H \mathbf{D}_{\tau_2} \mathbf{F} \mathbf{s}_0) \right| \quad (13)$$

在具体实现过程中,通过遍历 $\{\tau, \nu\}$ 的可能取值范围,得到式(12)和式(13)中互相关函数最大幅值对应的坐标即为 $\{\hat{\tau}_1, \hat{\nu}_1\}$ 和 $\{\hat{\tau}_2, \hat{\nu}_2\}$ ,依据式(10)可以进一步估计得到双站时差频差估计值 $\{\hat{\tau}, \hat{\nu}\}$ ,经线性变换可最终获得时差频差估计值 $\hat{t}_d = T\hat{\tau}$ 和 $\hat{f}_d = \hat{\nu}/2\pi T$ 。

上述方法通过估计两站观测信号相对于已知参考信号的时延、频移,并计算两者差分来估计双站时差、频差,其计算量主要集中在基于互模糊函数的两站时延、频移估计部分。仅考虑两次时延、频移估计过程的计算复杂度,以复数乘法次数统计新方法的计算量,并记时频差搜索估计过程中时差频差二维网格点数目为 $K$ ,得到新方法的计算复杂度对比情况如表1所示。

表1 新方法的计算复杂度

Tab. 1 Computational complexity of the new method	
方法步骤	计算复杂度
步骤一:估计 $\{\tau_1, \nu_1\}$	$N$ 点长度信号互模糊函数,计算量为 $KN \ln N$
步骤二:估计 $\{\tau_2, \nu_2\}$	$N$ 点长度信号互模糊函数,计算量为 $KN \ln N$
总计算量	$2KN \ln N$

## 4 时差频差估计精度的CRLB分析

对参数估计精度的CRLB进行分析可以方便评估不同方法的优越性,并反映各种因素对参数估计性能的影响情况。然而,式(1)~式(4)给出的观测数据模型并没有建立观测数据与待估时差频差参数之间的直接联系,给CRLB分析造成了困难。本部分先对该信号模型进行改写,以建立直接依赖于双站时差频差的观测数据模型,随后基于该模型推导已知波形信号条件下的双站时差频差估计精

度的CRLB,最后分析双站时差频差估计精度与对应的单站估计性能之间的关系。

### 4.1 依赖于双站时差频差的观测信号模型

为了方便对双站时差频差估计性能进行分析,有必要将双站时差和频差参数在观测信号模型中更直观地展现出来。为此,参考式(3)和式(4)的形式,建立双站接收信号之间的关联如下:

$$\mathbf{s}_2 = a e^{j\phi} \mathbf{D}_\nu \mathbf{F}^H \mathbf{D}_\tau \mathbf{F} \mathbf{s}_1 \quad (14)$$

其中 $a = a_2/a_1$ 表示两个接收站的相对信号增益, $\phi = \phi_2 - \phi_1$ 表示两个接收站在采集信号时的相对初始相位, $\mathbf{D}_\nu = \text{diag}\{\exp(j\nu l)\}$ , $\mathbf{D}_\tau = \text{diag}\left\{\exp\left(-j\frac{2\pi\tau}{N}l\right)\right\}$ 。

基于上述模型,将第二个接收站的观测数据由式(2)改写为

$$\mathbf{x}_2 = a_1 a e^{j(\phi_1+\phi)} \mathbf{D}_\nu \mathbf{F}^H \mathbf{D}_\tau \mathbf{F} \mathbf{D}_{\nu_1} \mathbf{F}^H \mathbf{D}_{\tau_1} \mathbf{F} \mathbf{s}_0 + \mathbf{u}_2 = a_1 a e^{j(\phi_1+\phi)} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 + \mathbf{u}_2 \quad (15)$$

其中 $\mathbf{Q} = \mathbf{D}_\nu \mathbf{F}^H \mathbf{D}_\tau \mathbf{F}$ 。在假设入射信号的相对带宽较小的情况下,双站时差频差之间满足 $\mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \approx \mathbf{Q}_2$ ,因此式(15)与式(2)、式(4)给出的信号模型近似等价。

通过改写第二个接收站的信号形式,观测模型中的未知变量集合也随之发生了变化,新的变量集合为

$$\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{a}^T, \boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}^T]^T \quad (16)$$

其中, $\mathbf{a} = [a_1, a]^T$ , $\boldsymbol{\theta}_1 = [\phi_1, \tau_1, \nu_1]^T$ , $\boldsymbol{\theta} = [\phi, \tau, \nu]^T$ 。通过建立和利用第二个接收站信号与第一个接收站信号之间的联系,待估计参数 $\tau$ 和 $\nu$ 更加直观地呈现在了观测数据模型中。

相应地,观测数据 $\mathbf{x}$ 的分布函数形式变化为:

$$\mathbf{x} \sim \text{CN}(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_{2N}) \quad (17)$$

其中, $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 e^{j\phi_1} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 \\ a_1 a e^{j(\phi_1+\phi)} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 \end{bmatrix}$ 。

### 4.2 时差频差估计精度的CRLB推导

依据式(6)得到观测数据 $\mathbf{x}$ 关于参数集 $\boldsymbol{\xi}$ 的Fisher信息矩阵 $\mathbf{J}_\xi$ 为:

$$\mathbf{J}_\xi = 2 \cdot \text{Re} \left\{ \left( \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^H \cdot \sigma^{-2} \mathbf{I}_{2N} \cdot \left( \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) \right\} = \frac{2}{\sigma^2} \cdot \text{Re} \left\{ \left( \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^H \left( \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) \right\} \quad (18)$$

偏导数 $\partial \boldsymbol{\mu} / \partial \boldsymbol{\xi}$ 中的各个分块元素分别为:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} e^{j\phi_1} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 & \mathbf{0} \\ a e^{j(\phi_1+\phi)} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 & a_1 e^{j(\phi_1+\phi)} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}_1} = \begin{bmatrix} ja_1 e^{j\phi_1} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 & -j \frac{2\pi}{N} a_1 e^{j\phi_1} \mathbf{P}_1 \mathbf{s}_0 & ja_1 e^{j\phi_1} \mathbf{L} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 \\ ja_1 a e^{j(\phi_1+\phi)} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 & -j \frac{2\pi}{N} a_1 a e^{j(\phi_1+\phi)} \mathbf{Q} \mathbf{P}_1 \mathbf{s}_0 & ja_1 a e^{j(\phi_1+\phi)} \mathbf{Q} \mathbf{L} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ ja_1 a e^{j(\phi_1+\phi)} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 & -j \frac{2\pi}{N} a_1 a e^{j(\phi_1+\phi)} \mathbf{Q} \mathbf{P}_1 \mathbf{s}_0 & ja_1 a e^{j(\phi_1+\phi)} \mathbf{L} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中,  $\mathbf{L} = \text{diag}(\mathbf{l})$ ,  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{D}_v \mathbf{F}^H \mathbf{L} \mathbf{D}_v \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{D}_v \mathbf{F}^H \mathbf{L} \mathbf{D}_v \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{0}$ 表示全0向量或矩阵,其维数可由上下文确定。

对上述表达式进行拼接,并通过数学计算得到

$$\text{Re} \left\{ \left( \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^H \left( \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1+a^2) \mathbf{s}_0^H \mathbf{s}_0 & a_1 a \mathbf{s}_0^H \mathbf{s}_0 \\ a_1 a \mathbf{s}_0^H \mathbf{s}_0 & a_1^2 \mathbf{s}_0^H \mathbf{s}_0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{B} = a_1^2 (1+a^2) \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0^H \mathbf{s}_0 & -\frac{2\pi}{N} \|\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{F} \mathbf{s}_0\|_2^2 & \|\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0\|_2^2 \\ -\frac{2\pi}{N} \|\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{F} \mathbf{s}_0\|_2^2 & \left( \frac{2\pi}{N} \right)^2 \|\mathbf{L} \mathbf{F} \mathbf{s}_0\|_2^2 & -\frac{2\pi}{N} \mathbf{s}_0^H \mathbf{P}_1^H \mathbf{L} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 \\ \|\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0\|_2^2 & -\frac{2\pi}{N} \mathbf{s}_0^H \mathbf{Q}_1^H \mathbf{L} \mathbf{P}_1 \mathbf{s}_0 & \|\mathbf{L} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0\|_2^2 \end{bmatrix} \right\} \quad (24)$$

$$\mathbf{C} = a_1^2 a^2 \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0^H \mathbf{s}_0 & -\frac{2\pi}{N} \|\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{F} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0\|_2^2 & \|\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0\|_2^2 \\ -\frac{2\pi}{N} \|\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{F} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0\|_2^2 & \left( \frac{2\pi}{N} \right)^2 \|\mathbf{L} \mathbf{F} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0\|_2^2 & -\frac{2\pi}{N} \mathbf{s}_0^H \mathbf{Q}_1^H \mathbf{P}^H \mathbf{L} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 \\ \|\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0\|_2^2 & -\frac{2\pi}{N} \mathbf{s}_0^H \mathbf{Q}_1^H \mathbf{Q}^H \mathbf{L} \mathbf{P} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 & \|\mathbf{L} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0\|_2^2 \end{bmatrix} \right\} \quad (25)$$

$$\mathbf{D} = a_1^2 a^2 \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0^H \mathbf{s}_0 & -\frac{2\pi}{N} \|\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{F} \mathbf{s}_0\|_2^2 & \|\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0\|_2^2 \\ -\frac{2\pi}{N} \|\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{F} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0\|_2^2 & \left( \frac{2\pi}{N} \right)^2 \mathbf{s}_0^H \mathbf{Q}_1^H \mathbf{F}^H \mathbf{L} \mathbf{P}_1 \mathbf{s}_0 & -\frac{2\pi}{N} \mathbf{s}_0^H \mathbf{Q}_1^H \mathbf{F}^H \mathbf{L} \mathbf{F} \mathbf{L} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 \\ \|\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{Q} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0\|_2^2 & -\frac{2\pi}{N} \mathbf{s}_0^H \mathbf{Q}_1^H \mathbf{Q}^H \mathbf{L} \mathbf{P}_1 \mathbf{s}_0 & \mathbf{s}_0^H \mathbf{Q}_1^H \mathbf{Q}^H \mathbf{L} \mathbf{Q} \mathbf{L} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0 \end{bmatrix} \right\} \quad (26)$$

由式(22)可以看出,信号幅度参数  $\mathbf{a} = [a_1, a]^T$  的估计精度与时差、频差和相位参数  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = [\boldsymbol{\theta}_1^T, \boldsymbol{\theta}^T]^T$  的估计精度之间相互独立。在式(18)和式(22)中,将信号幅度参数  $\mathbf{a}$  当作冗余参数加以剔除,得到参数集  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  对应的 Fisher 信息矩阵为:

$$\mathbf{J}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{2}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (27)$$

进一步地,由矩阵求逆引理<sup>[20]</sup>,得到参数集  $\boldsymbol{\theta}$  的 Fisher 信息矩阵为:

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}} = \frac{2}{\sigma^2} (\mathbf{C} - \mathbf{D} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D}^T) \quad (28)$$

对式(28)求逆,就可以得到参数集  $\boldsymbol{\theta}$  估计精度的 CRLB 矩阵,其对角线元素分别表示  $\phi$ 、 $\tau$  和  $\nu$  的估

计值的均方误差下限,再经过线性变换,就可以得到两通道时差  $t_d$  和频差  $f_d$  的 CRLB。

综合式(24)~(28),将 CRLB 表达式中与  $a_1$  和  $a$  有关的变量抽出,可以得到  $\text{CRLB}_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}$  与  $a_1^2$  成正比,以及随  $a^2$  单调减小的结论,表明两个通道接收信号的幅度越大,则时差、频差估计精度越高,这与参数估计性能的常识是吻合的。

#### 4.3 与单通道参数估计性能的对比如分析

在本文给出的双站时差频差估计方法中,首先利用参考信号波形先验信息估计两个观测站各自的信号时延和频移,然后依据式(10)对两通道参数估计值相减以得到双站时差和频差估计结果。相比而言,主动雷达的回波时延和频移估计可类比为

已知波形条件下的单通道参数估计问题,也可看作是本文研究问题在  $a_1=1$  和  $\theta_1=[\phi_1, \tau_1, \nu_1]^T=\mathbf{0}$  条件下的简化情况。直观来看,双站时差、频差均未知的信号模型中未知参数更多,比单通道时延、频移参数具有更强的不确定性,因此双站时差估计精度比同等条件下雷达回波时延、频移估计精度会有所降低。以下借助定量分析证明这一结论。

由于观测数据  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  中的随机噪声相互独立,所以由式(8)和式(9)得到的两通道时延、频移估计值的估计误差之间也相互独立,因此

$$\text{var}(\hat{\tau}) = \text{var}(\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_1) = \text{var}(\hat{\tau}_1) + \text{var}(\hat{\tau}_2) \quad (29)$$

两通道时差和各自时延估计精度的 CRLB 对应于其估计方差的最小值,因此

$$\begin{aligned} \text{CRLB}_{\hat{\tau}} &= \min \{ \text{var}(\hat{\tau}) \} = \\ &= \min \{ \text{var}(\hat{\tau}_1) \} + \min \{ \text{var}(\hat{\tau}_2) \} = \\ &= \text{CRLB}_{\hat{\tau}_1} + \text{CRLB}_{\hat{\tau}_2} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mathbf{C}_0 = a^2 \text{Re} \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{s}^H \mathbf{s} & -\frac{2\pi}{N} \left\| L^{1/2} \mathbf{D}_\tau \mathbf{F} \mathbf{s} \right\|_2^2 \\ -\frac{2\pi}{N} \left\| L^{1/2} \mathbf{D}_\tau \mathbf{F} \mathbf{s} \right\|_2^2 & \left( \frac{2\pi}{N} \right)^2 \left\| \mathbf{L} \mathbf{D}_\tau \mathbf{F} \mathbf{s} \right\|_2^2 \\ \left\| L^{1/2} \mathbf{Q} \mathbf{s} \right\|_2^2 & -\frac{2\pi}{N} \mathbf{s}^H \mathbf{P}^H \mathbf{L} \mathbf{Q} \mathbf{s} \end{array} \right\} \quad (35)$$

与已有成果一致。对该矩阵求逆,可以得到对应的参数估计精度 CRLB 为:

$$\text{CRLB}'_{\theta} = \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{C}_0^{-1} \quad (36)$$

所得矩阵中各对角线元素即为参数集  $\theta=[\phi, \tau, \nu]^T$  中各元素估计精度的 CRLB。

在第一个通道观测数据中引入相位  $\phi_1$ 、时延  $t_{d1}$  和频移  $f_{d1}$  等未知参数之后,对双通道时差、频差的估计性能可由式(28)计算获得。对该式求逆,得到参数集  $\theta$  估计精度的 CRLB 矩阵为:

$$\text{CRLB}_{\theta} = \frac{\sigma^2}{2} \left( \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{B} - \mathbf{D}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (37)$$

记  $\mathbf{M} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} (\mathbf{B} - \mathbf{D}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{C}^{-1}$ , 显然该矩阵为正定矩阵。取  $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^T$ ,  $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^T$ , 则两种情况下对  $\tau$  和  $\nu$  的估计精度的 CRLB 满足如下关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2^T \times \text{CRLB}_{\theta} \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_2^T \times \text{CRLB}'_{\theta} \times \mathbf{e}_2 + \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{e}_2^T \times \mathbf{M} \times \mathbf{e}_2 > \\ &= \mathbf{e}_2^T \times \text{CRLB}'_{\theta} \times \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3^T \times \text{CRLB}_{\theta} \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_3^T \times \text{CRLB}'_{\theta} \times \mathbf{e}_3 + \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{e}_3^T \times \mathbf{M} \times \mathbf{e}_3 > \\ &= \mathbf{e}_3^T \times \text{CRLB}'_{\theta} \times \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (39)$$

即相比于第二个通道的时延、频移参数估计结果,未知参数集  $\theta_1$  的引入降低了双通道信号时差和

类似地,两通道频差和各自频移估计精度的 CRLB 满足:

$$\text{CRLB}_{\hat{\nu}} = \text{CRLB}_{\hat{\nu}_1} + \text{CRLB}_{\hat{\nu}_2} \quad (31)$$

由于参数估计精度的 CRLB 均为正值,因此

$$\text{CRLB}_{\hat{\tau}} > \max \{ \text{CRLB}_{\hat{\tau}_1}, \text{CRLB}_{\hat{\tau}_2} \} \quad (32)$$

$$\text{CRLB}_{\hat{\nu}} > \max \{ \text{CRLB}_{\hat{\nu}_1}, \text{CRLB}_{\hat{\nu}_2} \} \quad (33)$$

经线性变换  $t_d = T\tau$  和  $f_d = \nu/2\pi T$  之后,对时延、频移参数可得到相同结论。

上述结论也可以由上一小节给出的 CRLB 的定量分析结果得到。在假设  $a_1=1$  和  $\theta_1=[\phi_1, \tau_1, \nu_1]^T=\mathbf{0}$  的条件下,通过与上一小节分析类似的过程,可以得到参数集  $\theta=[\phi, \tau, \nu]^T$  的 Fisher 信息矩阵为:

$$\mathbf{J}'_{\theta} = \frac{2}{\sigma^2} \mathbf{C} \quad (34)$$

其中,  $\mathbf{s} = a_1 e^{j\phi} \mathbf{Q}_1 \mathbf{s}_0$  对应于该简化模型中的已知信号,简化后的 Fisher 信息矩阵表达式为

频差的估计精度。

类似地,如果在上两个小节的时差、频差估计性能分析过程中,保留未知参数集为  $\xi'=[\mathbf{a}'^T, \theta_2^T, \theta^T]^T$ , 其中  $\mathbf{a}'=[a_2, a_1]^T$ ,  $\mathbf{a}'=a_1/a_2$ ,  $\theta_2=[\phi_2, \tau_2, \nu_2]^T$ 。则借助类似的分析,也可以证明双通道时差频差估计精度低于第一个通道的时延、频移参数估计精度。

## 5 仿真实验

本部分借助仿真实验验证论文所提出的时差频差估计方法的性能,以及已知信号波形条件下关于双站时差估计性能的理论分析结果的正确性。仿真过程中通过改变观测站与辐射源之间的时差频差值、两通道接收信号的信噪比等参数来构造不同的场景,选取多次独立实验中得到的参数估计均方根误差作为性能评价指标,并在对应场景下比较了4种时差频差精度,包括:①本文所提出的时差频差估计方法,估计值由式(10)最终给出;②基于互模糊函数(CAF)的传统方法<sup>[11-15]</sup>;③两通道累积误差,为两通道时延、频移值估计误差平方和的算术平方根,即  $\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\{ (\hat{t}_{d1}^{(m)} - t_{d1})^2 + (\hat{t}_{d2}^{(m)} - t_{d2})^2 \right\}}$ ,

$\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\{ (\hat{f}_{d1}^{(m)} - f_{d1})^2 + (\hat{f}_{d2}^{(m)} - f_{d2})^2 \right\}}$ , 其中  $M$  表示统

计仿真次数,上标( $m$ )表示第 $m$ 次仿真中对应参数的估计值,两通道的时差频差估计值分别由式(12)和式(13)给出;④时差频差估计精度的CRLB,通过对式(28)的Fisher信息矩阵求逆得到。

上述比较对象②中互模糊函数可看作一种近似最大似然方法,用于估计两站接收信号的时差频差,即

$$\hat{\tau}, \hat{\nu} = \max_{\tau, \nu} |x_2^H(D_\nu F^H D_\tau F x_1)| \quad (40)$$

在具体实现过程中,通过遍历 $\{\tau, \nu\}$ 的可能取值范围,得到上式中互相关函数最大幅值对应的坐标即为 $\{\hat{\tau}, \hat{\nu}\}$ ,经线性变换可获得最终获得时差频差估计值 $\hat{t}_d = T\hat{\tau}$ 和 $\hat{f}_d = \hat{\nu}/2\pi T$ 。

仿真实验中,假设两个观测站与辐射源之间的几何构型如图1所示,辐射源静止不动,两个观测站以不同速度沿水平方向高速运动,它们与辐射源之间的距离差异和相对径向速度差异造成了双站接收信号之间的时间差和频率差。假设入射信号采用BPSK调制,信号带宽为200 kHz,信号持续时长为1.5 ms,信号原始波形先验已知,但该波形会在被两个观测站接收时因传播时延和多普勒频移等因素而产生变化。接收机采样率为1 MHz,每种场景下的统计仿真次数为500次。

首先,基于图1中描述的几何构型,进一步假设辐射源与两个观测站基线中点的斜距为15 km,两个观测站距离20 km,两个观测站分别以150 m/s和250 m/s的速度沿水平方向运动,固定两个观测站接收信号的信噪比为-2 dB、时差和频差分别为7.12  $\mu$ s和1 kHz,并假设两个观测站接收信号的信噪比相等且逐渐变化,得到不同方法的时差频差估计精度随信噪比的变化情况如图2所示。

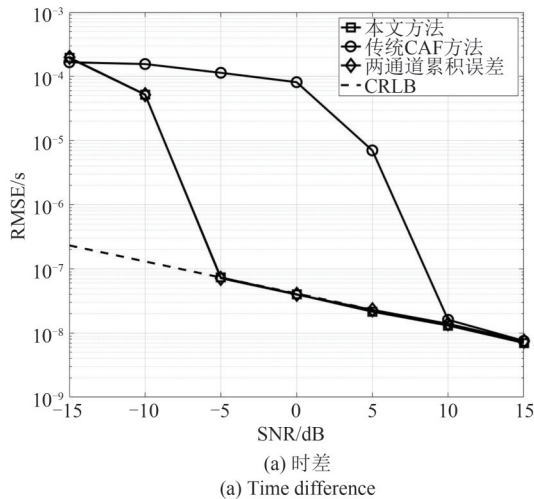


图2 两个观测站接收信号信噪比同步变化时的时差、频差估计精度

Fig. 2 Time difference and frequency difference estimation accuracies when the signal-to-noise ratio of the signals received at two observation stations changes synchronously

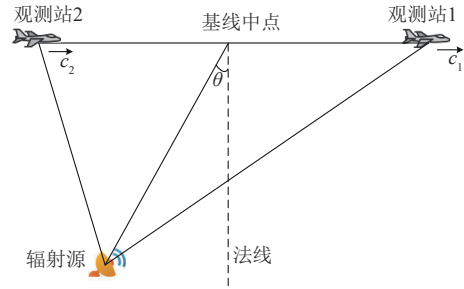


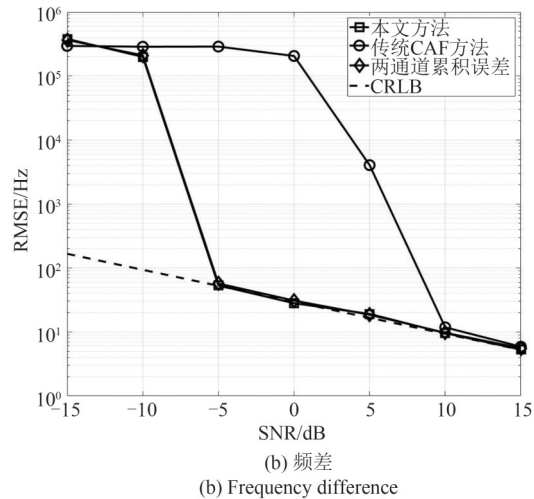
图1 观测站与辐射源的几何构型

Fig. 1 Geometric relationship between observation station and radiation source

图2中的仿真结果表明,新方法借助对信号波形先验信息的利用,获得了显著优于传统CAF方法的时差频差估计精度。新方法在两个观测站接收信号低至-5 dB时,就能够获得高精度的时差、频差估计结果,且随着信噪比的进一步升高,其参数估计性能与CRLB十分吻合,且与两通道参数估计结果的累积误差基本一致,表明该方法是一种近似最优的估计方法,这些现象较好地验证了第四部分的理论分析结果。相比而言,传统CAF方法只有在信噪比升高至10 dB左右时才能够实现对时差、频差的可靠估计,其信噪比适应能力与新方法相比有较大差距,这一差距说明了在时差频差估计过程中对信号波形先验信息进行充分利用的重要性。

随后,在上一组仿真实验的基础上,固定第一个观测站接收信号的信噪比为0 dB,逐渐改变第二个观测站接收信号的信噪比,得到几种方法的时差、频差估计精度的变化情况如图3所示。

图3中的仿真结果再次验证了新方法相比于传



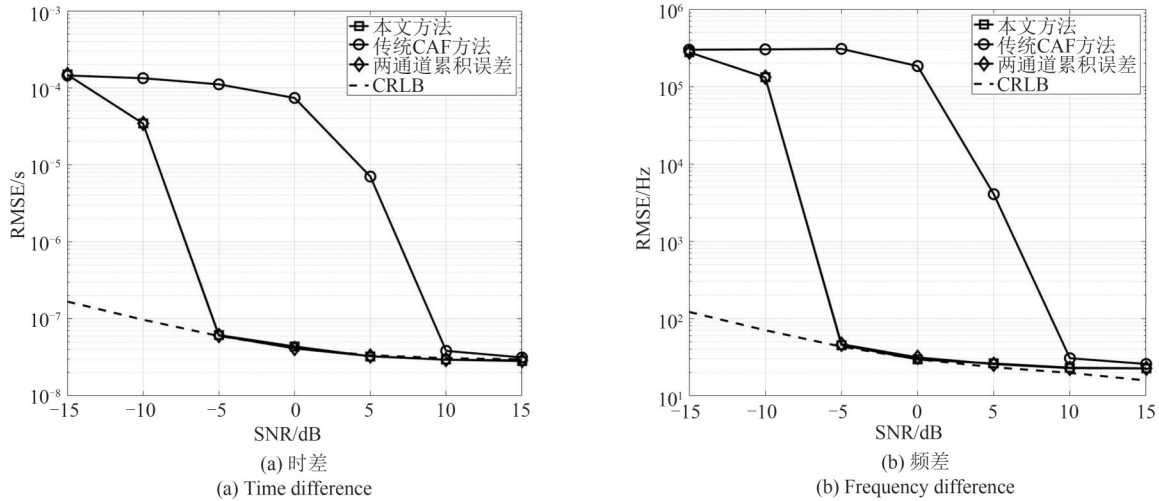


图3 单个观测站接收信号信噪比变化时的时差、频差估计精度

Fig. 3 Time difference and frequency difference estimation accuracies when the signal-to-noise ratio of the signal received at a single observation station changes

统CAF方法在信噪比适应能力方面的显著优势。与图2中的结果类似,新方法和传统CAF方法分别在第二个观测站的信噪比超过-5 dB和10 dB时达到收敛,新方法具有约15 dB的信噪比适应能力优势。进一步还可以看出,由于这一场景中两个观测站信噪比没有同步增大,图3和图2中的结果之间也存在一定区别。图3中时频差估计精度的CRLB和新方法的时频差估计均方根误差并没有随着第二个观测站接收信号的信噪比提高而呈对数线性规律减小,参数估计精度提高的速度更慢一些。对比式(28)中的Fisher信息矩阵和相应的CRLB表达式,尽管CRLB<sub>0</sub>与单个观测站接收信号的功率成反比,但在单个观测站功率增大、另一个观测站功率保持不变的过程中,两个观测站的信号功率之比 $a^2$ 随之减小,给参数估计精度的提高带来了负面影响,最终减缓了参数估计精度的提高速度。当第二个观测站接收信号的信噪比超过0 dB后,新方法的时频差估计精度与CRLB之间存在一定偏离,这也是由第一个观测站接收信号中较为显著的观测噪声造成的。

## 6 结论

本文针对观测站与辐射源之间存在相对运动的场景,充分利用信号波形先验信息提出了一种时差频差高精度估计方法,并理论推导了参数估计精度的CRLB,分析了时差频差估计精度与单通道时延、频移估计精度之间的关系。仿真实验结果表明,借助对信号波形先验信息的利用,新方法获得了比基于互模糊函数的传统时差频差估计方法更高的参数估计精度,以及对低信噪比等非理想信号环境的更强的适应能力。在所设定的信号环境中,新方法对

低信噪比的适应能力比基于互模糊函数的传统方法增强了15 dB左右。当新方法的参数估计性能达到收敛之后,其时差频差估计精度与CRLB非常吻合,且与两通道各自的时延、频移估计结果的累积误差一致,这些现象证明了本文理论分析结果的正确性。

## 参考文献

- [1] 郭福成, 李金洲, 张敏. 无源定位原理与方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2021: 1-433.  
GUO Fucheng, LI Jinzhou, ZHANG Min. Passive Location Theories and Methods[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2021: 1-433. (in Chinese)
- [2] 田中成, 刘聪锋. 无源定位技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015: 1-55.  
TIAN Zhongcheng, LIU Congfeng. Passive Locating Technology [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2015: 1-55. (in Chinese)
- [3] 曲志昱, 王超然, 孙萌. 基于改进迭代扩展卡尔曼滤波的3星时频差测向融合动目标跟踪方法[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(10): 2871-2877.  
QU Zhiyu, WANG Chaoran, SUN Meng. Tracking method of moving target for three-satellite TDOA/FDOA/DOA system based on improved IEKF algorithm[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2021, 43(10): 2871-2877. (in Chinese)
- [4] 饶云华, 潘登, 朱华梁, 等. 基于一次反射的室内WiFi辐射源单站定位方法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2021, 19(4): 672-677.  
RAO Yunhua, PAN Deng, ZHU Hualiang, et al. Single Station localization of indoor WiFi emitter with multipath exploitation[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2021, 19(4): 672-677. (in Chinese)

- [5] MA Fuhe, LIU Zhangmeng, GUO Fucheng, et al. Joint TDOA and FDOA estimation for interleaved pulse trains from multiple pulse radiation sources [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2020, 56(5): 4099-4111.
- [6] HO K C, XU Wenwei. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(9): 2453-2463.
- [7] PINE K C, PINE S, CHENEY M. The geometry of far-field passive source localization with TDOA and FDOA [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2021, 57(6): 3782-3790.
- [8] FOWLER M L, HU Xi. Signal models for TDOA/FDOA estimation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2008, 44(4): 1543-1550.
- [9] 孙霆, 董春曦, 毛昱. 一种基于半定松弛技术的TDOA-FDOA 无源定位算法 [J]. 电子与信息学报, 2020, 42(7): 1599-1605.  
SUN Ting, DONG Chunxi, MAO Yu. A TDOA-FDOA passive positioning algorithm based on the semi-definite relaxation technique [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2020, 42(7): 1599-1605. (in Chinese)
- [10] 国强, 李文韬. 一种4站情况下基于TDOA/FDOA的无源定位方法 [J]. 航空学报, 2021, 42(2): 324236.  
GUO Qiang, LI Wentao. Passive location method based on TDOA/FDOA in case of 4 receivers [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2021, 42(2): 324236. (in Chinese)
- [11] LIU Shengheng, SHAN Tao, TAO Ran, et al. Sparse discrete fractional Fourier transform and its applications [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(24): 6582-6595.
- [12] RAMACHANDRA Anupama. Cross ambiguity function for emitter location [D]. USA: State University of New York at Binghamton, 2008: 1-127.
- [13] KIM D G, PARK G H, KIM H N, et al. Computationally efficient TDOA/FDOA estimation for unknown communication signals in electronic warfare systems [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, 54(1): 77-89.
- [14] BENTZ K P. Computation of the cross ambiguity function using perfect reconstruction DFT filter banks [D]. Fairfax, VA, USA: George Mason University, 2007: 1-102.
- [15] YEREDOR A, ANGEL E. Joint TDOA and FDOA estimation: A conditional bound and its use for optimally weighted localization [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(4): 1612-1623.
- [16] 万显荣, 易建新, 占伟杰, 等. 基于多照射源的被动雷达研究进展与发展趋势 [J]. 雷达学报, 2020, 9(6): 939-958.  
WAN Xianrong, YI Jianxin, ZHAN Weijie, et al. Research progress and development trend of the multi-illuminator-based passive radar [J]. Journal of Radars, 2020, 9(6): 939-958. (in Chinese)
- [17] 李万春. 外辐射源定位跟踪技术的研究 [D]. 成都: 电子科技大学, 2009: 1-138.  
LI Wanchun. Studies on location and tracking of passive radar [D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2009: 1-138. (in Chinese)
- [18] 吴乐南, 张晓冬. 基于民用广播、电视信号的被动定位方法研究 [J]. 东南大学学报(自然科学版), 2002, 32(6): 853-856.  
WU Lenan, ZHANG Xiaodong. Research of passive location method based on broadcasting and TV signals [J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2002, 32(6): 853-856. (in Chinese)
- [19] 朱滢. 基于数字电视的无源定位系统研究 [D]. 南京: 南京理工大学, 2004: 1-64.  
ZHU Ying. Research on passive locating systems based on digital TV signals [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2004: 1-64. (in Chinese)
- [20] 张贤达. 矩阵分析与应用 [M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2013.  
ZHANG Xianda. Matrix Analysis and Applications [M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013. (in Chinese)

## 作者简介



刘严女, 1987年生, 河南信阳人。国防科技大学电子科学学院讲师, 博士, 主要研究方向为无源定位技术。  
E-mail: liuyan01@nudt.edu.cn



朱毅男, 1997年生, 四川仪陇人。国防科技大学电子科学学院硕士研究生, 主要研究方向为无源定位、信号处理。  
E-mail: zhuyi20@nudt.edu.cn



张源女, 1997年生, 山东青岛人。国防科技大学电子科学学院博士研究生, 主要研究方向为无源定位技术。  
E-mail: zhangyuan@nudt.edu.cn



郭福成男, 1975年生, 江西龙南人。国防科技大学电子科学学院教授, 博士, 主要研究方向为无源定位技术、雷达信号处理、无源定位和目标跟踪。  
E-mail: gfclly@21cn.com

(责任编辑: 刘建新)