

# 一种深度学习稀疏单快拍 DOA 估计方法

朱晗归 冯存前 冯为可 刘成梁

(中国人民解放军空军工程大学, 防空反导学院, 陕西西安 710051)

**摘要:** 基于信号的稀疏特性, 稀疏恢复(Sparse Recovery, SR)方法可利用单快拍数据进行相关信号源的高分辨率波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计。然而, 现有 SR-DOA 模型求解方法存在参数设置困难、运算复杂度高或精度有待提高等问题, 实际应用受限。针对上述问题, 本文提出平滑 L0 网络(Smoothed L0 Net, SLO-Net)方法, 将基于模型驱动 SLO 算法和基于数据驱动的深度学习方法相结合, 用于 SR-DOA 模型的求解。首先, 建立 DOA 估计的 SR 模型, 并对用于求解该模型的 SLO 算法进行分析。然后, 根据深度学习框架构建 SLO-Net, 并基于充足完备的数据集对其网络参数进行训练。最后, 利用训练得到的 SLO-Net 对 SR-DOA 模型进行求解, 获得 DOA 高分辨估计。仿真结果表明, 与现有典型算法相比, 所提 SLO-Net 更适于信号源数目未知条件下的快速高分辨 DOA 估计。

**关键词:** 波达方向估计; 稀疏恢复; 平滑 L0 范数; 深度学习

**中图分类号:** V221+.3; TN951 **文献标识码:** A **DOI:** 10.16798/j.issn.1003-0530.2022.10.012

**引用格式:** 朱晗归, 冯存前, 冯为可, 等. 一种深度学习稀疏单快拍 DOA 估计方法[J]. 信号处理, 2022, 38(10): 2114-2123. DOI: 10.16798/j.issn.1003-0530.2022.10.012.

**Reference format:** ZHU Hangui, FENG Cunqian, FENG Weike, et al. A deep learning approach for sparse single snapshot DOA estimation[J]. Journal of Signal Processing, 2022, 38(10): 2114-2123. DOI: 10.16798/j.issn.1003-0530.2022.10.012.

## A Deep Learning Approach for Sparse Single Snapshot DOA Estimation

ZHU Hangui FENG Cunqian FENG Weike LIU Chengliang

(Air and Missile Defense College, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710051, China)

**Abstract:** Based on the sparsity of signal, Sparse Recovery (SR) method can use single snapshot data for high-resolution DOA (Direction of Arrival) estimation of correlated signal sources. However, existing methods for solving the SR-DOA model always suffer from the problems of parameter setting difficulty, high computational complexity, or low recovery accuracy, limiting their practical applications. To solve these problems, this paper proposes Smoothed L0 Net (SLO-Net), which combines the model-based SLO algorithm and the data-driven deep learning method to solve the SR-DOA model. At first, the SR model for DOA estimation is established and the SLO algorithm used to solve this model is analyzed. Then, based on deep learning framework, SLO-Net is constructed, whose parameters are trained with sufficient and complete datasets. At last, the trained SLO-Net is used for solving the SR-DOA model, achieving the high-resolution DOA estimation result. Simulation results show that, compared with existing typical algorithms, the proposed SLO-Net is more suitable for fast and high-resolution DOA estimation under the condition of unknown signal source number.

**Key words:** direction of arrival (DOA) estimation; sparse recovery; smoothed L0 norm; deep learning

## 1 引言

波达方向 (Direction of Arrival, DOA) 估计技术广泛应用于雷达、声纳、电子侦察、无线电通信等领域, 是阵列信号处理的一个重要研究方向<sup>[1]</sup>。典型的 DOA 估计方法包括: Capon 空间谱估计方法<sup>[2]</sup>、特征子空间类多重信号分类 (Multiple Signal Classification, MUSIC) 方法<sup>[3]</sup> 和基于旋转不变技术的信号参数估计方法 (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique, ESPRIT)<sup>[4]</sup> 等。这些方法可以获得较高的角度分辨率, 实际应用广泛, 但需要利用多快拍接收数据对信号协方差矩阵进行估计, 且无法对相干信号源进行有效处理。为解决这些问题, 学者们提出了空间平滑和矩阵重构等改进方法<sup>[5-6]</sup> 进行解相干处理, 利用单快拍接收数据估计信号协方差矩阵进行 DOA 估计。然而, 这些方法往往具有角度分辨率降低、计算复杂度升高等问题。

近年来, 稀疏恢复 (Sparse Recovery, SR) 理论的发展<sup>[7-11]</sup> 为 DOA 估计提供了新的思路。通过对角度空间或空间频率进行网格划分, 构建导向矢量字典, 使得阵列接收数据呈现稀疏特性, 可以将 DOA 估计问题转化为稀疏信号的恢复问题, 从而利用单快拍数据对相干信号源进行高分辨 DOA 估计。目前, 用于求解 SR-DOA 模型的算法主要包括 L1 范数最小化算法、正交匹配追踪 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP) 算法和平滑 L0 (Smoothed L0, SLO) 算法<sup>[12-14]</sup> 等。其中, L1 范数最小化算法将 SR 问题转化为二阶锥规划问题进行求解, 具有较高的精度, 但运算比较复杂; OMP 算法计算成本低、估计误差较小, 但往往需要信号稀疏度等先验信息; SLO 算法估计精度高、无需先验信息、运算复杂度低, 但通常需对其参数进行设置, 限制了其在实际中的应用。

随着深度学习 (Deep Learning, DL) 技术的发展<sup>[15]</sup>, 相关学者将深度神经网络 (Deep Neural Networks, DNN) 技术应用到 DOA 估计之中。例如, 文献<sup>[16]</sup> 首先基于自编码器进行空间滤波, 然后通过多层感知器进行信号拟合, 实现了两源 DOA 估计; 文献<sup>[17]</sup> 将 DOA 估计问题转化为多分类问题, 利用卷积神经网络 (Convolutional Neural Network, CNN) 实现了不同信号源条件下的 DOA 估计; 文献<sup>[18]</sup> 提

出了 Deep-MUSIC 方法, 利用多个 CNN 学习接收数据协方差矩阵与 MUSIC 空间谱之间的非线性关系, 实现了多源 DOA 估计。但是, 上述方法实现 DOA 估计的理论性和可解释性不强, 且均需多快拍数据进行协方差矩阵估计, 作为 DNN 的输入。

为利用 DNN 的优点, 并保持 SR 的可解释性, Gregor 等提出了深度展开 (Deep Unfolding, DU) 方法<sup>[19]</sup>。DU 方法的本质是将特定的迭代 SR 算法展开为一个 DNN, 网络层数代表 SR 算法的迭代次数, 网络各层的参数代表 SR 算法的迭代参数。利用训练数据对该 DNN 进行训练, 可以获得所对应 SR 算法的最优参数, 从而提高稀疏恢复性能。受 DU 方法的启发, 为解决现有 SR-DOA 方法存在的参数设置困难、精度有待提高等问题, 本文结合模型驱动的 SLO 算法和数据驱动的 DL 方法, 提出 SLO 网络 (SLO-Net), 用于求解 SR-DOA 模型, 获得高分辨 DOA 估计。首先, 建立了 SR-DOA 模型, 对 SLO 算法进行了介绍, 并分析了其数据流图。其次, 将 SLO 算法展开为一个多层 DNN, 构建了 SLO-Net, 网络结构主要包括更新层和投影层, 网络参数为 SLO 算法的逼近参数和迭代步长。最后, 通过定义网络损失函数、构建数据集, 对 SLO-Net 进行训练, 得到最优参数进行 DOA 估计。仿真实验结果表明, 相比 SLO 算法, 本文所提出的 SLO-Net 能够在运算复杂度较低的前提下提高 DOA 估计性能; 相比于 L1 算法和 OMP 算法, SLO-Net 能够在信号源数目未知的情况下快速获得高分辨 DOA 估计结果。

## 2 信号模型

### 2.1 SR-DOA 模型

假设有  $Z$  个远场窄带信号入射到由  $M$  个阵元构成的一维均匀线阵 (Uniform Linear Array, ULA), 则第  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, I$ ) 时刻阵列接收的信号可表示为:

$$\mathbf{y}(t_i) = \sum_{z=1}^Z \mathbf{a}(f_z) s_z(t_i) + \mathbf{n}(t_i) \quad (1)$$

式中  $s_z(t_i)$  为第  $z$  个信号的复幅度,  $z = 1, 2, \dots, Z$ ,  $\mathbf{n}(t_i)$  为零均值高斯白噪声,  $\mathbf{a}(f_z)$  为第  $z$  个信号的导向矢量, 表示为:

$$\mathbf{a}(f_z) = [1, e^{j\pi f_z}, \dots, e^{j\pi(M-1)f_z}]^T \quad (2)$$

式中  $f_z = 2d \sin \theta_z / \lambda$  为第  $z$  个信号所对应的空间频

率,  $d$  为阵元间距,  $\lambda$  为信号波长,  $\theta_z$  为第  $z$  个信号与阵列之间的夹角,  $[\cdot]^T$  表示转置。

式(1)可改写为矢量形式, 表示为:

$$\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{A}_z \mathbf{s}_z(t_i) + \mathbf{n}(t_i) \quad (3)$$

式中  $\mathbf{A}_z = [\mathbf{a}(f_1), \mathbf{a}(f_2), \dots, \mathbf{a}(f_z)] \in \mathbf{C}^{M \times Z}$  为信号导向矢量矩阵,  $\mathbf{s}_z(t_i) = [s_1(t_i), s_2(t_i), \dots, s_z(t_i)] \in \mathbf{C}^{Z \times 1}$  为信号幅度矢量。

DOA 估计的目的在于基于式(3)得到不同入射信号的空间频率  $f_1, f_2, \dots, f_z$ , 从而得到信号角度  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_z$ 。若  $I = 1$ , 则对应单快拍 DOA 估计模型; 若  $I > 1$ , 则对应多快拍 DOA 估计模型。本文仅考虑单快拍下的 DOA 估计, 因此在后续推导中将忽略时间变量  $t_i$ 。

为基于 SR-DOA 模型进行 DOA 估计, 可将整个空间频率范围平均划分为  $N$  个网格, 基于不同的空间频率  $f_1, f_2, \dots, f_N$  构造导向矢量字典  $\mathbf{A}$ , 表示为:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(f_1), \mathbf{a}(f_2), \dots, \mathbf{a}(f_N)] \in \mathbf{C}^{M \times N} \quad (4)$$

在此基础上, 假设  $Z$  个入射信号的空间频率均位于所划分的网格上, 则阵列接收信号矢量可表征为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (5)$$

式中  $\mathbf{s} \in \mathbf{C}^{N \times 1}$  为  $N$  个空间频率所对应的复幅度矢量。由于信号源个数  $Z$  一般远小于网格数  $N$ , 因此  $\mathbf{s}$  中仅包含少量非零元素, 即  $\mathbf{s}$  为稀疏的。基于此, 可以将 DOA 估计问题转化为如下所示的稀疏恢复问题:

$$\operatorname{argmin}_s \|\mathbf{s}\|_0, \quad \text{s.t.} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2 \leq \varepsilon \quad (6)$$

式中  $\varepsilon$  表示噪声电平,  $\|\cdot\|_0$  和  $\|\cdot\|_2$  分别表示向量的 L0 范数和 L2 范数。

## 2.2 SL0 算法

由于 L0 范数是向量的不连续函数, 因此需要利用组合搜索的方法对式(6)进行求解, 这种方法运算复杂度高, 无法在实际中进行应用。为解决这个问题, SL0 算法通过构造一簇高斯函数逼近 L0 范数, 从而将离散函数优化问题转化为连续函数优化问题, 并结合最速下降法和梯度投影法最小化平滑函数所构成的代价函数, 对式(6)进行求解。具体而言, 考虑如下函数:

$$f_\sigma(x) = \exp(-|x|^2/2\sigma^2) \quad (7)$$

其满足:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

因此, 假设  $s_n$  为  $\mathbf{s}$  的第  $n$  个元素, 定义如下代价函数:

$$F_\sigma(\mathbf{s}) = N - \sum_{n=1}^N f_\sigma(s_n) \quad (9)$$

则式(6)可以转化为下式进行求解

$$\operatorname{argmin}_s \lim_{\sigma \rightarrow 0} F_\sigma(\mathbf{s}), \quad \text{s.t.} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2 \leq \varepsilon \quad (10)$$

逼近参数  $\sigma$  决定了  $F_\sigma(\mathbf{s})$  逼近 L0 范数的程度和平滑性:  $\sigma$  越小, 则  $F_\sigma(\mathbf{s})$  越接近于 L0 范数, 但越不光滑, 造成式(10)越难以求解。为了能够尽可能得到式(6)的最优解, SL0 算法采用一个  $\sigma$  的递减序列对式(10)进行求解, 其具体过程如表 1 所示。

表 1 SL0 算法

Tab. 1 SL0 algorithm

输入:  $\mathbf{A}, \mathbf{y}$ , 迭代次数  $K$ , 内部循环次数  $L$ 。

- 步骤 1 初始化: 由  $\mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{A}^+ \mathbf{y}$  得到  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{s}$  的最小二乘范数解, 其中  $(\cdot)^+$  表示取伪逆, 给定逼近参数序列  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_K\}$ , 迭代步长序列  $\{\mu_1, \dots, \mu_K\}$ , 令  $k = 1$ ;
- 步骤 2 令  $\mathbf{s}_0^{(k)} = \mathbf{s}^{(k-1)}$ ;
- 步骤 3 利用  $L$  次最速下降和梯度投影获得  $F_\sigma(\mathbf{s})$  在可行域  $\mathbf{s} = \{\mathbf{s} : \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2 \leq \varepsilon\}$  上的最小值, 即循环  $l = 1, 2, \dots, L$ :  
 计算  $\Delta F_{\sigma_l}(s_{l-1}^{(k)}) = -s_{l-1}^{(k)} \odot \exp(-|s_{l-1}^{(k)}|^2/2\sigma_l^2)/\sigma_l^2$ ;  
 $\mathbf{M}_l^{(k)}$ : 令  $\mathbf{s}_l^{(k)} = \mathbf{s}_{l-1}^{(k)} + \mu_k \sigma_l^2 \Delta F_{\sigma_l}(s_{l-1}^{(k)})$ ;  
 $\mathbf{Z}_l^{(k)}$ : 将  $\mathbf{s}_l^{(k)}$  投影到可行域:  $\mathbf{s}_l^{(k)} \leftarrow \mathbf{s}_l^{(k)} + \mathbf{A}^+(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}_l^{(k)})$ ;
- 步骤 4 令  $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{s}_L^{(k)}$ ,  $k \leftarrow k + 1$ , 若  $k \leq K$ , 则返回步骤 2, 否则结束。

输出:  $\mathbf{s} = \mathbf{s}^{(K)}$ 。

对于 SL0 算法,  $\sigma$  序列和  $\mu$  序列均提前给定, 一般情况下可令  $\sigma_1 = 2 \max |\mathbf{s}^{(0)}|$ ,  $\sigma_k = c \sigma_{k-1}$ ,  $c = 0.5 \sim 1$ ,  $\mu_1 = \dots = \mu_K = \mu > 0$ 。然而, 固定的  $\sigma$  和  $\mu$  并不能保证 SL0 算法获得最好的收敛结果, 不恰当的设置将会导致 SL0 算法估计精度下降、收敛速度变慢。

## 2.3 SL0 数据流图

为了方便构建本文 SL0-Net, 如图 1 所示, 将 SL0 算法的主要迭代步骤映射为一个数据流图, 其主要由 SL0 算法所对应的不同节点和不同节点之间表示数据流动的有向边组成。数据流图的第  $k$  层表示 SL0 算法的第  $k$  次外层迭代, 其包括  $2L$  个子层, 即更新层 ( $\mathbf{M}_{l=1:L}^{(k)}$ ) 和投影层 ( $\mathbf{Z}_{l=1:L}^{(k)}$ )。可以看出, SL0 算法的  $K \times 2L$  次迭代可以映射为一个  $K$  层的数据流图,

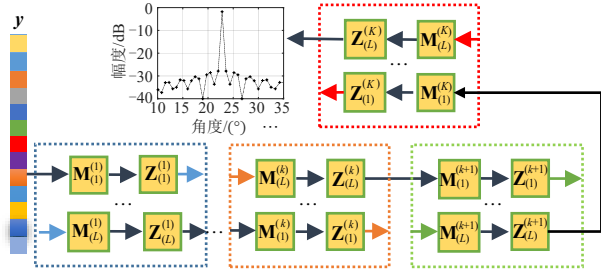


图 1 SL0 算法的数据流图

Fig. 1 The data flow graph of SL0 algorithm

输入的阵列接收数据将沿着此数据流图进行传递，获得 DOA 估计结果。

### 3 基于 SL0-Net 的 DOA 估计

实际上，对于式 (6) 所示的 SR 问题，当导向矢量字典  $\mathbf{A}$  固定，且向量  $\mathbf{s}$  服从一定的稀疏分布时，接收数据  $\mathbf{y}$  也会服从一定的分布。此时，可假设存在一组最优的  $\sigma$  序列和  $\mu$  序列，使得对于所有服从一定分布的数据，SL0 算法均能够进行高效稀疏恢复。因此，为了解决 SL0 算法所存在的参数设置问题，结合模型驱动算法的可解释性和数据驱动深度学习方法的非线性拟合能力，本节基于 SL0 算法的迭代步骤和数据流图，构建 SL0-Net 网络，将其用于求解 SR-DOA 模型。SL0-Net 主要包括更新层和投影层，网络参数为逼近参数  $\sigma$  和迭代步长  $\mu$ 。基于服从一定分布的训练数据对 SL0-Net 进行训练，能够获得最优的  $\sigma$  序列和  $\mu$  序列，提高 DOA 估计的性能。

下面，对 SL0-Net 的网络结构、数据集构建、参数学习策略、初始化与训练方法四部分内容进行具体描述。

#### 3.1 网络结构

根据表 1 所示的算法步骤和图 1 所示的数据流图，可以将 SL0 算法等效为一个如图 2 所示的  $K$  层网络，即 SL0-Net，其输入为  $\mathbf{y}$ 、 $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{s}^{(0)}$ ，参数为

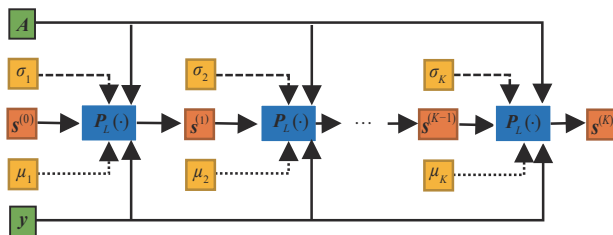


图 2 SL0-Net 网络结构

Fig. 2 The network structure of SL0-Net

$\{\sigma_1, \dots, \sigma_K\}$  和  $\{\mu_1, \dots, \mu_K\}$ ，非线性激活函数为  $P_L(\cdot)$ ，输出为  $\mathbf{s}^{(K)}$ 。其中，SL0-Net 的第  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) 层运算可表示为：

$$\mathbf{s}^{(k)} = P_L(\mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{s}^{(k-1)}, \sigma_k, \mu_k) \quad (11)$$

非线性激活函数  $P_L(\cdot)$  即为 SL0 算法的内部循环 (即表 1 中的步骤 3)，可以表示为一个  $L$  层的子网络，其输入为  $\mathbf{y}$ 、 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{s}_0^{(k)}$ 、 $\sigma_k$  和  $\mu_k$ ，输出为  $\mathbf{s}_L^{(k)}$ 。 $P_L(\cdot)$  第  $l$  层 ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) 的结构如图 3 所示，其主要包括更新层 (蓝色框) 和投影层 (橙色框)，具体描述如下。

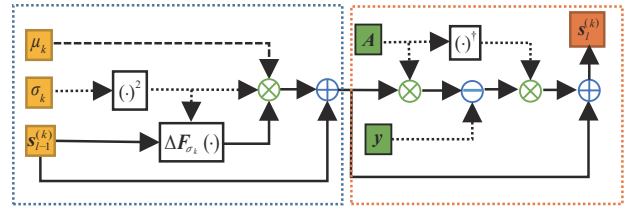


图 3 子网络  $P_L(\cdot)$  的第  $l$  层网络结构

Fig. 3 The structure of the  $l$ -th layer of sub-network  $P_L(\cdot)$

更新层 ( $\mathbf{M}_{l=1:L}^{(k)}$ ): 将 SL0-Net 第  $k-1$  层的第  $L$  个投影层的输出  $\mathbf{s}_L^{(k-1)}$  作为其初始值  $\mathbf{s}_0^{(k)}$ ，则更新层  $\mathbf{M}_{l=1:L}^{(k)}$  的操作可以表示为：

$$\mathbf{s}_l^{(k)} = \mathbf{s}_{l-1}^{(k)} + \mu_k \sigma_k^2 \Delta F_{\sigma_k}(\mathbf{s}_{l-1}^{(k)}) \quad (12)$$

式中  $\Delta F_{\sigma_k}(\mathbf{s}_{l-1}^{(k)}) = -\mathbf{s}_{l-1}^{(k)} \odot \exp(-|\mathbf{s}_{l-1}^{(k)}|^2 / 2\sigma_k^2) / \sigma_k^2$ ， $\sigma_k$  和  $\mu_k$  分别为 SL0-Net 第  $k$  层的逼近参数和迭代步长，输出  $\mathbf{s}_l^{(k)}$  作为投影层  $\mathbf{Z}_l^{(k)}$  的输入。

投影层 ( $\mathbf{Z}_{l=1:L}^{(k)}$ ): 将更新层  $\mathbf{M}_l^{(k)}$  的输出  $\mathbf{s}_l^{(k)}$  作为输入，则投影层  $\mathbf{Z}_{l=1:L}^{(k)}$  的操作可以表示为：

$$\mathbf{s}_l^{(k)} = \mathbf{s}_l^{(k)} + \mathbf{A}^+(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}_l^{(k)}) \quad (13)$$

式中  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^H(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1}$ ，当  $l \leq L-1$  且  $k \leq K$  时，输出  $\mathbf{s}_l^{(k)}$  作为更新层  $\mathbf{M}_{l+1}^{(k)}$  的输入，当  $l = L$  且  $k \leq K-1$  时，输出  $\mathbf{s}_L^{(k)}$  作为 SL0-Net 第  $k+1$  层的第 1 个更新层  $\mathbf{M}_1^{(k+1)}$  的输入，当  $l = L$  且  $k = K$ ，输出  $\mathbf{s}_L^{(K)}$  作为 SL0-Net 的最终输出  $\mathbf{s}^{(K)}$ 。

#### 3.2 数据集构建

本文所构建的 SL0-Net 是一种“模型+数据”联合驱动的稀疏恢复方法，合理构建具有泛化能力的数据集是决定其有效性的关键。只有构建充足完备的数据集，SL0-Net 在训练过程中才不容易出现过拟合现象，从而获得较好的稀疏恢复性能。为了使得信号源的数量、DOA 和幅度以及阵列接收数据均具有一定的分布，本文按照“固定导向矢量字典  $\mathbf{A}$ 、随机产生具有一定分布的稀疏向量  $\mathbf{s}$ 、生成对应



的阵列接收数据 $\mathbf{y}$ ”的方式构建数据集。具体而言:

1) 给定阵元数 $M$ 、阵元间隔 $d$ 、波长 $\lambda$ 、空间频率范围 $[f_{\min}, f_{\max}]$ 和网格数 $N$ , 根据式(4)构建导向矢量字典 $\mathbf{A}$ ;

2) 产生 $Q$ 个稀疏向量 $\mathbf{s}$ 作为训练标签集(即 $\{\mathbf{s}_q^{\text{train}}\}_{q=1}^Q$ )、 $O$ 个稀疏向量 $\mathbf{s}$ 作为测试标签集(即 $\{\mathbf{s}_o^{\text{test}}\}_{o=1}^O$ ), 其中每个 $\mathbf{s}$ 的各个元素相互独立, 服从伯努利分布, 以概率 $P$ 具有非零值, 且非零元素的幅度服从复标准正态分布;

3) 根据 $\mathbf{A}$ 、 $\{\mathbf{s}_q^{\text{train}}\}_{q=1}^Q$ 和 $\{\mathbf{s}_o^{\text{test}}\}_{o=1}^O$ , 生成对应的训练数据集 $\{\mathbf{y}_q^{\text{train}}\}_{q=1}^Q$ 和测试数据集 $\{\mathbf{y}_o^{\text{test}}\}_{o=1}^O$ , 其中 $\mathbf{y}_q^{\text{train}} = \mathbf{A}\mathbf{s}_q^{\text{train}}$ ,  $\mathbf{y}_o^{\text{test}} = \mathbf{A}\mathbf{s}_o^{\text{test}} + \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$ 为加性高斯白噪声, 信噪比为SNR。

需要说明的是, 由于在实际应用中噪声电平一般是未知的, 因此本文在训练SL0-Net的过程中, 仅利用不含噪声的训练数据, 在测试时则在数据中加入噪声以验证SL0-Net在不同SNR条件下的性能。

### 3.3 参数学习策略

所构建SL0-Net的参数包括 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_K\}$ 和 $\{\mu_1, \dots, \mu_K\}$ , 为对它们进行优化, 本文考虑两种网络参数学习策略, 分别对应SL0-Net1和SL0-Net2。

#### (1) SL0-Net1

参考SL0算法的参数设置, SL0-Net1令 $\sigma_k = c\sigma_{k-1}$ ,  $\mu_1 = \dots = \mu_k$ , 其中 $c$ 为衰减因子。因此, 该网络将仅对 $\sigma_1$ 、 $c$ 和 $\mu_1$ 三个参数进行学习, 以获得较好的 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_K\}$ 和 $\{\mu_1, \dots, \mu_K\}$ 。这种方式的优势在于网络学习参数较少, 因此训练时间较短、陷入局部最优的概率较小, 缺点在于网络的非线性拟合能力不足。

#### (2) SL0-Net2

SL0-Net2不再受限于 $\sigma_k = c\sigma_{k-1}$ 和 $\mu_1 = \dots = \mu_k$ , 而是对于每一层的 $\sigma_k$ 和 $\mu_k$ 均进行学习, 相应的网络学习参数个数为 $2K$ 。这种学习策略的优势在于灵活性高, 网络具有较高的非线性拟合能力, 缺点在于网络容易陷入局部最优、训练时间较长。需要强调的是, 由于包含的运算相同, 因此在相同层数的条件下, 经过训练的SL0-Net1和SL0-Net2在应用时将具有相同的运算复杂度。

### 3.4 初始化和训练方法

网络的初始化和训练方法对于SL0-Net的性能具有一定的影响: 较好的初始化和训练方法能够使

得网络更容易达到收敛, 在一定程度上避免陷入局部最优。

#### (1) 初始化

为了使所提出的SL0-Net网络适用于具有一定分布的所有阵列接收数据和稀疏向量, 而不是仅对单一数据对有效, 我们令网络的输入 $\mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{0}$ , 且根据SL0算法的典型参数设置, 在SL0-Net1中, 按照 $\sigma_1 = 2\max\{\max|\mathbf{s}_q^{(0)}|\}_{q=1}^Q, c = 0.5, \mu_1 = 1$ 的方式进行初始化, 其中 $\mathbf{s}_q^{(0)} = (\mathbf{A})^\dagger \mathbf{y}_q^{\text{train}}$ ; 在SL0-Net2中, 按照 $\sigma_k = 0.5^{k-2} \max\{\max|\mathbf{s}_q^{(0)}|\}_{q=1}^Q, \mu_1 = \dots = \mu_k = 1$ 的方式进行初始化。需要强调的是, 与SL0算法相比, SL0-Net网络在初始化时避免了计算 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{s}$ 的最小二乘范数解。因此, 在迭代次数相同的情况下, SL0-Net网络的运算复杂度较低。

#### (2) 训练方法

给定网络层数 $K$ 和训练数据集 $\Pi = \{\mathbf{s}_q^{\text{train}}, \mathbf{y}_q^{\text{train}}\}_{q=1}^Q$ , 定义归一化均方误差(Normalized Mean Square Error, NMSE)为网络损失函数, 表示为:

$$E(\Theta) = \frac{1}{Q} \sum_{(\mathbf{y}_q^{\text{train}}, \mathbf{s}_q^{\text{train}}) \in \Pi} \frac{\|\hat{\mathbf{s}}_q^{(K)}(\Theta, \mathbf{A}, \mathbf{s}^{(0)}, \mathbf{y}_q^{\text{train}}) - \mathbf{s}_q^{\text{train}}\|_2^2}{\|\mathbf{s}_q^{\text{train}}\|_2^2} \quad (14)$$

式中 $\hat{\mathbf{s}}_q^{(K)}(\Theta, \mathbf{A}, \mathbf{s}^{(0)}, \mathbf{y}_q^{\text{train}})$ 表示以 $\Theta$ 为参数、以 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{s}^{(0)}$ 和 $\mathbf{y}_q^{\text{train}}$ 为输入的SL0-Net的第 $K$ 层输出。

对于SL0-Net1, 网络参数的最优值 $\Theta^* = \{\sigma_1^*, \mu_1^*, c^*\}$ 可直接利用后向传播算法最小化网络损失函数 $E(\Theta)$ 得到, 即:

$$\Theta^* = \arg \min_{\Theta} E(\Theta) \quad (15)$$

对于SL0-Net2, 为了避免陷入局部最优, 可利用逐层训练的方法对网络参数进行学习。具体而言, 在对网络前 $k$ 层进行训练获得 $\Theta_{1:k}^* = \{\sigma_k^*, \mu_k^*\}_{1:k}$ 的前提下, 分两步对网络的前 $k+1$ 层参数进行训练。首先, 保持 $\Theta_{1:k}^*$ 不变, 利用后向传播算法求解如式(16)所示的优化问题学习网络的第 $k+1$ 层参数 $\Theta_{k+1}$ :

$$\Theta_{k+1}^* = \arg \min_{\Theta_{k+1}} \frac{1}{Q} \sum_{(\mathbf{y}_q^{\text{train}}, \mathbf{s}_q^{\text{train}}) \in \Pi} \frac{\|\hat{\mathbf{s}}_q^{(k+1)}(\{\Theta_{1:k}^*, \Theta_{k+1}\}, \mathbf{A}, \mathbf{s}^{(0)}, \mathbf{y}_q^{\text{train}}) - \mathbf{s}_q^{\text{train}}\|_2^2}{\|\mathbf{s}_q^{\text{train}}\|_2^2} \quad (16)$$

式中 $\hat{\mathbf{s}}_q^{(k+1)}(\{\Theta_{1:k}^*, \Theta_{k+1}\}, \mathbf{A}, \mathbf{s}^{(0)}, \mathbf{y}_q^{\text{train}})$ 表示网络的第 $k+1$ 层输出。然后, 以 $\{\Theta_{1:k}^*, \Theta_{k+1}^*\}$ 为初值, 通过求解下式对 $\Theta_{1:k+1}$ 进行调整:

$$\Theta_{1:k+1}^* = \arg \min_{\Theta_{1:k+1}} \frac{1}{Q} \sum_{(y_q^{\text{train}}, s_q^{\text{train}}) \in \Pi} \frac{\|\hat{s}_q^{(k+1)}(\Theta_{1:k+1}, \mathbf{A}, \mathbf{s}^{(0)}, \mathbf{y}_q^{\text{train}}) - s_q^{\text{train}}\|_2^2}{\|s_q^{\text{train}}\|_2^2} \quad (17)$$

利用逐层训练的方法,从第 1 层开始一直到第  $K$  层,即可学习得到 SL0-Net2 的最优参数  $\Theta^* = \{\sigma_k^*, \mu_k^*\}_{k=1}^K$

在对其网络参数进行学习优化后,即可将 SL0-Net 应用于实际的 DOA 估计之中。具体而言,对于新的阵列接收数据  $\{\mathbf{y}_o^{\text{test}}\}_{o=1}^O$ ,可利用下式获得 DOA 估计结果:

$$\hat{\mathbf{s}}_o^{\text{test}} = \hat{\mathbf{s}}_o^{(K)}(\Theta^*, \mathbf{A}, \mathbf{s}^{(0)}, \mathbf{y}_o^{\text{test}}) \quad (18)$$

## 4 仿真实验

本节通过仿真实验对所提 SL0-Net 的 DOA 估计性能进行验证,并与 SL0 算法、OMP 算法和 L1 范数最小化算法进行对比分析。其中,在不同仿真中均设阵元间隔  $d = \lambda/2$ 、空间频率范围为  $[-1, 1]$ 、SL0 算法内部循环的次数和 SL0-Net 子网络  $P_L(\cdot)$  的层数均为  $L=3$ 。本文根据式(14)定义的 NMSE 指标衡量不同算法的 DOA 估计性能,所有仿真均基于 MATLAB 2021a 实现,平台为联想 P920 图形工作站,算法运行时间基于 MATLAB 的 TIC 和 TOC 命令获得。

### 4.1 DOA 估计性能

首先,给定阵元数  $M = 40$ 、网格数  $N = 161$ 、稀疏概率  $P = 0.01$ ,验证 SL0-Net 网络的 DOA 估计性能及其相比其他算法的优势。

将 SL0-Net 的网络层数设为  $K = 10$ ,根据 3.2 节所述方法构建  $Q = 10000$  的不含噪声的训练数据集,利用 Adam 算法(迭代次数为 4000)对 SL0-Net1 和 SL0-Net2 分别进行训练,可获得如表 2 和表 3 所示的网络参数优化结果。可以看出,两种参数学习策略得到的  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_K\}$  和  $\{\mu_1, \dots, \mu_K\}$  均与 SL0 算法的典型设置不同。特别是 SL0-Net2,学习得到的参数不受  $\sigma_k = c\sigma_{k-1}$  和  $\mu_1 = \dots = \mu_k$  限制,具有更高的灵活性。在对网络进行训练后,构建  $O = 1000$  的不含噪声的测试数据集,分析比较 SL0、SL0-Net1 和 SL0-Net2 的 DOA 估计性能。其中,SL0 算法的参数为:迭代次数  $K = 10$ ,对于每一测试数据  $\mathbf{y}_o^{\text{test}}$ ,  $\sigma_1 = 2\max\{|\mathbf{A}^+ \mathbf{y}_o^{\text{test}}|\}$ ,  $\sigma_k = 0.5\sigma_{k-1}$ ,  $\mu_1 = \dots = \mu_k = 1$ 。图 4 给出了 SL0、SL0-Net1 和 SL0-Net2 对四个测试样本

表 2 SL0-Net1 参数训练结果

Tab. 2 Parameter optimization results of SL0-Net1

	$\sigma_1$	$c$	$\mu_1$
初值	1.5675	0.5	1
终值	0.6391	0.6113	2.0633

表 3 SL0-Net2 参数训练结果

Tab. 3 Parameter optimization results of SL0-Net2

层数	$\sigma$ 初值	$\sigma$ 终值	$\mu$ 初值	$\mu$ 终值
1	1.5675	0.5859	1	3.1710
2	0.7837	0.3039	1	2.5107
3	0.3919	0.1379	1	1.7067
4	0.1959	0.0560	1	1.8282
5	0.0980	0.0609	1	3.1476
6	0.0490	0.1039	1	2.5478
7	0.0245	0.2244	1	1.1098
8	0.0122	0.0543	1	2.7762
9	0.0061	0.0246	1	2.9706
10	0.0031	0.0164	1	1.6428

进行处理所得到的 DOA 估计结果。可以看出,在不同信号源数目的条件下,本文所提 SL0-Net,特别是 SL0-Net2,均能够获得相比 SL0 算法更优的 DOA 估计结果,SL0-Net 的估计精度更高、旁瓣水平更低。

图 5 给出了利用 L1 范数最小化算法、OMP 算法和所提 SL0-Net2 对四个不同测试样本进行处理所得到的 DOA 估计结果。由图 5(a)和图 5(c)可以看出,当信号源角度间隔较大且信号源个数已知时,L1 算法和 OMP 算法相比所提方法性能较优。由图 5(b)可以看出,当信号源角度间隔较小时,所提 SL0-Net2 能够更容易分辨出不同的信号源,相比 L1 算法和 OMP 算法具有更高的角度分辨率。由图 5(d)可以看出,当信号源个数未知时,OMP 算法容易丢失信号源(该样本所包含的信号源个数为 4,OMP 算法的迭代次数设为 3)。进一步的,表 4 给出了利用不同算法对所有测试样本( $O = 1000$ )进行处理所需要的运行时间和所得到的 DOA 估计误差,其中 OMP 算法的迭代次数按照不同测试样本所包含的信号源个数进行设置。可以看出,所提 SL0-Net 的 DOA 估计性能仅次于 L1 算法,运行时间仅次于 OMP 算法。因此,相比于 L1 算法、OMP 算法和 SL0 算法,SL0-Net 更适于实际环境中信号源个数未知条件下的快速高分辨 DOA 估计。

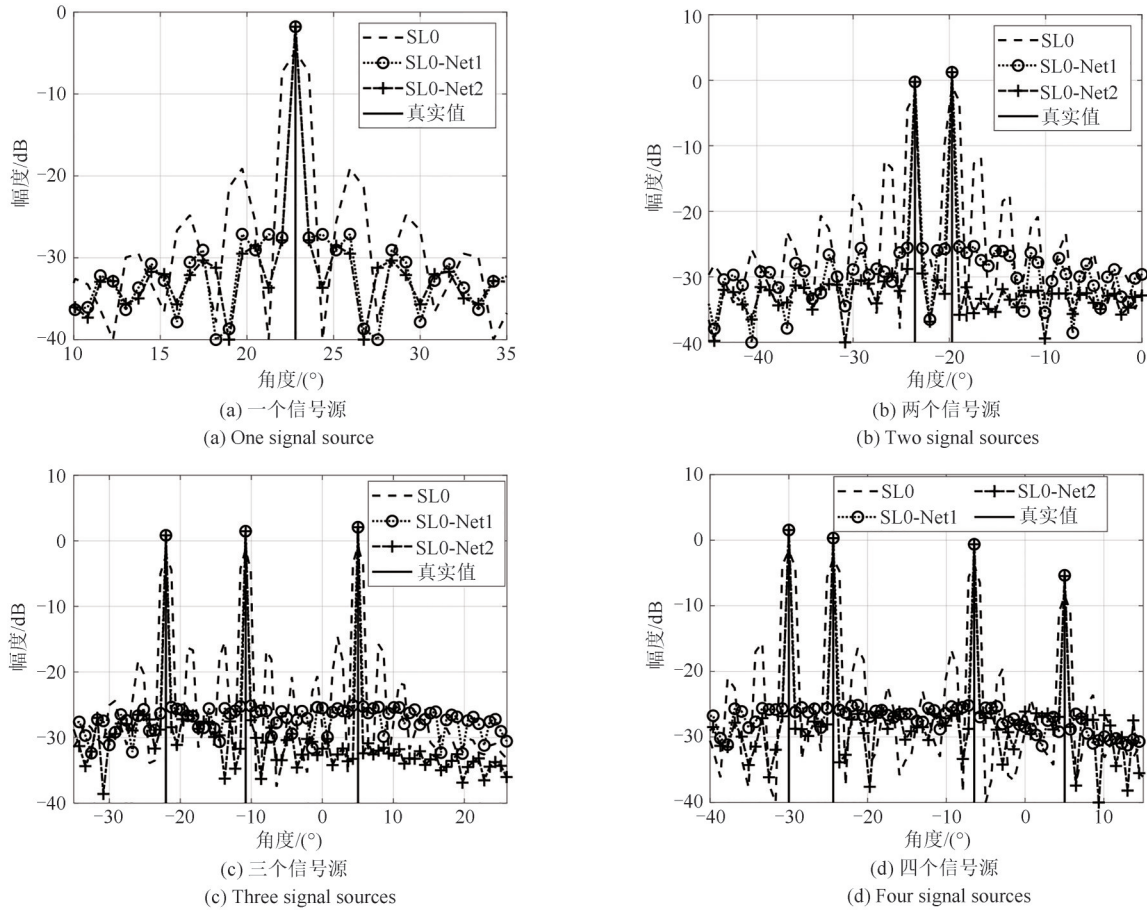


图4 SL0算法、SL0-Net1和SL0-Net2的DOA估计结果

Fig. 4 DOA estimation results obtained by SL0, SL0-Net1, and SL0-Net2

#### 4.2 SL0-Net分析

本小节对SL0-Net的DOA估计性能与网络层数 $K$ 、稀疏概率 $P$ 、网格数 $N$ 、信噪比SNR的关系进行分析。由于SL0-Net2相比SL0-Net1具有更优的性能,下面仅对SL0-Net2进行分析。

首先,给定阵元数 $M = 20/30/40$ 、网格数 $N = 161$ 、稀疏概率 $P = 0.01$ ,生成不含噪声的测试数据,验证SL0-Net网络性能与网络层数 $K$ 之间的关系,所得结果如图6所示。可以看出,随着网络层数的增加,SL0-Net的NMSE逐渐减少,DOA估计性能不断提高,且均优于SL0算法。由于SL0算法的参数固定,过多的迭代次数并不能显著提高其DOA估计性能。相比之下,所提SL0-Net网络的可学习参数随着网络层数的增加而增多,通过训练优化,可以获得更优的性能。此外,随着阵元数的增加,SL0算法和SL0-Net网络的DOA估计性能也相应提高。相比SL0算法,为获得相近的DOA估计性能,所提

SL0-Net所需要的网络层数和阵元数更少。

接着,给定阵元数 $M = 20/30/40$ 、网格数 $N = 161$ 、网络层数 $K = 10$ ,生成不含噪声的测试数据,验证SL0-Net网络性能与稀疏概率 $P$ 之间的关系,所得结果如图7所示。可以看出,在不同稀疏概率的情况下,所提SL0-Net网络的DOA估计性能均优于SL0算法。因此,相比SL0算法,在其他条件相同的情况下,所提SL0-Net网络能够对更多信号源进行DOA估计。但是,随着稀疏概率的增加,两种算法的NMSE均逐渐增加,DOA估计性能变差。这是因为在阵元数一定的情况下,信号源个数越少,稀疏恢复的性能越优,反之则越差。

然后,给定阵元数 $M = 20/30/40$ 、稀疏概率 $P = 0.01$ 、网络层数 $K = 10$ ,生成不含噪声的测试数据,验证SL0-Net网络的性能与网格数 $N$ (对应角度分辨率)之间的关系,所得结果如图8所示。可以看出,在不同网络数的情况下,所提SL0-Net的DOA估计



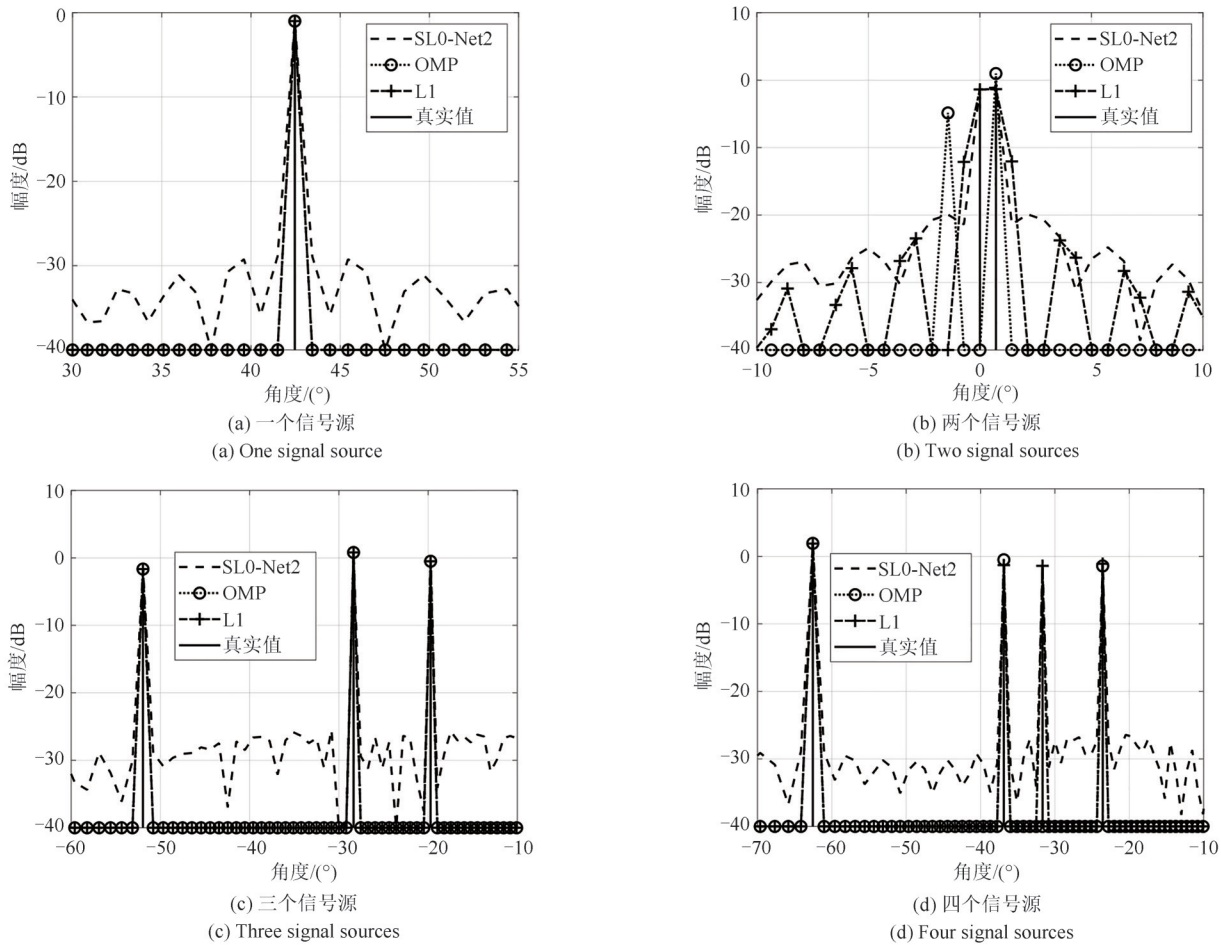


图 5 L1 算法、OMP 算法和 SL0-Net2 的 DOA 估计结果

Fig. 5 DOA estimation results obtained by L1, OMP, and SL0-Net2

表 4 不同算法 DOA 估计的运行时间和归一化均方根误差

Tab. 4 Running time and NMSEs of different algorithms

	SL0	SL0-Net1	SL0-Net2	OMP	L1
运行时间/s	0.35	0.32	0.32	0.06	271.99
NMSE/dB	-3.81	-15.00	-15.76	-13.37	-21.51

性能均优于 SL0 算法。因此,相比 SL0 算法,在其他条件相同的情况下,所提 SL0-Net 网络能够获得更高的角度分辨率。但是,随着网格数的增加(即可能的信号源角度间隔减小),两种算法的 NMSE 均逐渐增加,DOA 估计性能变差。这是因为在阵元数一定的情况下,多个信号源之间的角度越接近,稀疏恢复的性能越差,反之则越优。

最后,给定阵元数  $M = 20/30/40$ 、网格数  $N = 161$ 、稀疏概率  $P = 0.01$ 、网络层数  $K = 10$ ,生成具有

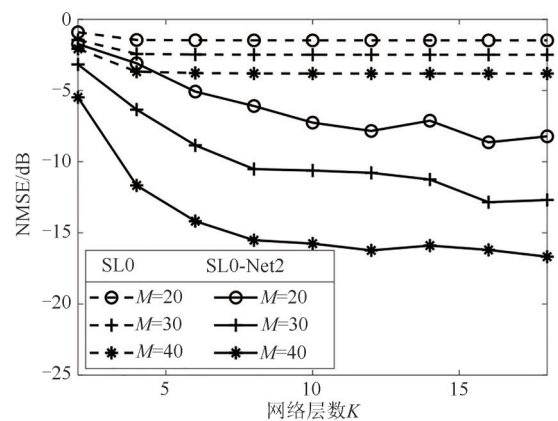


图 6 NMSE 与网络层数  $K$  的关系

Fig. 6 NMSE versus the network layer number  $K$

不同 SNR 的测试数据,验证 SL0-Net 网络的性能与阵列接收数据信噪比之间的关系,所得结果如图 9 所示。可以看出,虽然 SL0 和 SL0-Net 在 SNR 小于



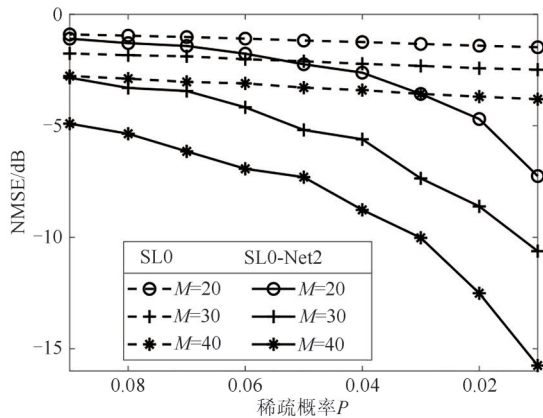
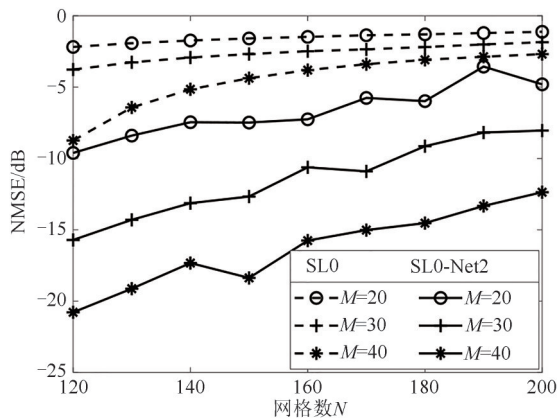
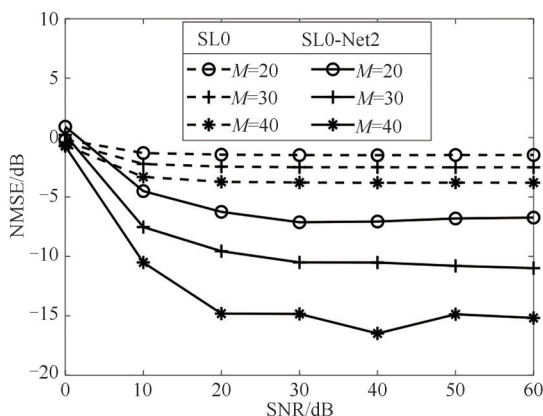
图7 NMSE与稀疏概率 $P$ 的关系Fig. 7 NMSE versus the sparse probability  $P$ 图8 NMSE与网格数 $N$ 的关系Fig. 8 NMSE versus the grid number  $N$ 

图9 NMSE与信噪比的关系

Fig. 9 NMSE versus SNR

10 dB时性能均较差,但当SNR大于10 dB后,SL0-Net的DOA估计性能均优于SL0算法。因此,在其他条件相同的条件下,SL0-Net具有更高的噪声鲁

棒性。此外,当SNR > 20 dB,SL0-Net的DOA估计NMSE趋于稳定,且接近于无噪声情况下获得的结果。这意味着,即使利用无噪声数据进行网络训练,SL0-Net依然能够获得较好的参数结果,能够对含噪声的实际阵列接收数据进行DOA估计。

## 5 结论

针对单快拍DOA估计问题,本文在建立信号模型和对SL0算法进行分析的基础上,提出了模型和数据联合驱动的SL0-Net方法,对其网络结构、数据集构建、参数学习策略、初始化与训练方法等内容进行了详细介绍,并通过不同的仿真实验对其性能进行了验证。仿真结果表明,所提SL0-Net相比SL0算法具有更高的DOA估计性能,且具有更低的运算复杂度。在其他条件相同的条件下,相比SL0算法,SL0-Net所需的迭代次数和阵元数更少,能够对更多的信号源进行DOA估计,且具有更高的分辨率和噪声鲁棒性。与L1范数最小化算法和OMP算法相比,SL0-Net在信号源数目未知的条件下,能够快速获得高分辨DOA估计结果。考虑到实际应用中不可避免地存在阵列误差,因此下一步将对误差条件下SL0-Net的改进方法进行深入研究,并将其应用于实际数据的处理之中。

## 参考文献

- [1] 闫锋刚,沈毅,刘帅,等. 高效超分辨波达方向估计算法综述[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(7): 1465-1475.  
YAN Fenggang, SHEN Yi, LIU Shuai, et al. Overview of efficient algorithms for super-resolution DOA estimates [J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(7): 1465-1475. (in Chinese)
- [2] 贺顺,杨志伟,张娟,等. 自适应加权修正的强弱信号Capon谱估计方法[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(5): 905-908.  
HE Shun, YANG Zhiwei, ZHANG Juan, et al. Modified Capon approach with adaptive weighted for discriminating strong and weak signals [J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(5): 905-908. (in Chinese)
- [3] PASCAL V, MESTRE X, LOUBATON P. Performance analysis of an improved MUSIC DOA estimator [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(23): 6407-6422.

- [4] YU J, LI J, SUN B, et al. Multiple RFI sources location method combining two-dimensional ESPRIT DOA estimation and particle swarm optimization for spaceborne SAR [J]. *Remote Sensing*, 2021, 13(6): 1207.
- [5] XU H, CUI W, DU Y, et al. The analysis of using spatial smoothing for DOA estimation of coherent signals in sparse arrays [J]. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2021.
- [6] CHEN H, HOU C P, WANG Q, et al. Cumulants-based toeplitz matrices reconstruction method for 2-D coherent DOA estimation [J]. *IEEE Sensors Journal*, 2014, 14(8): 2824-2832.
- [7] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [8] REN Junying, YU Lei, LYU Chengcheng, et al. Dynamical sparse signal recovery with fixed-time convergence [J]. *Signal Processing*, 2019, 162: 65-74.
- [9] ZHONG Jinrong, WEN Gongjian. Compressive sensing for radar target signal recovery based on block space bayesian learning [J]. *Journal of Radars*, 2016, 5(1): 99-108.
- [10] 王秀红, 毛兴鹏, 张乃通. 基于降维稀疏重构的相干信源二维 DOA 估计方法 [J]. *系统工程与电子技术*, 2016, 38(8): 1709-1715.  
WANG Xiuhong, MAO Xingpeng, ZHANG Naitong. Two-dimensional DOA estimation for coherent sources based on reduction dimension sparse reconstruction [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2016, 38(8): 1709-1715. (in Chinese)
- [11] 杨书宁, 杨仲平, 张剑云, 等. 子阵分级处理与稀疏恢复联合的抗主副瓣干扰方法 [J]. *信号处理*, 2021, 37(9): 1681-1690.  
YANG Shuning, YANG Zhongping, ZHANG Jianyun, et al. Combination of subarray processing and sparse recovery for mainlobe and sidelobes interference suppression [J]. *Journal of Signal Processing*, 2021, 37(9): 1681-1690. (in Chinese)
- [12] CHEN S S, DONOHO D L, SAUNDERS M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. *SIAM Review*, 2001, 43(1): 129-159.
- [13] TROPP J A, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [14] MOHIMANI H, BABAIE-ZADEH M, JUTTEN C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed  $l_0$  norm [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(1): 289-301.
- [15] BENGIO Y. *Learning Deep Architectures for AI* [M]. Now Publishers Inc, 2009.
- [16] LIU Zhangmeng, ZHANG Chenwei, YU P S. Direction-of-arrival estimation based on deep neural networks with robustness to array imperfections [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2018, 66(12): 7315-7327.
- [17] PAPAGEORGIOU G K, SELATHURAI M, ELDAR Y C. Deep networks for direction-of-arrival estimation in low SNR [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 3714-3729.
- [18] ELBIR A M. DeepMUSIC: Multiple signal classification via deep learning [J]. *IEEE Sensors Letters*, 2020, 4(4): 1-4.
- [19] GREGOR K, LECUN Y. Learning fast approximations of sparse coding [C]. *Proceedings of the 27th International Conference on International Conference on Machine Learning*, 2010: 399-406.

#### 作者简介



朱晗归 男, 1997年生, 陕西渭南人。空军工程大学防空反导学院硕士研究生, 主要研究方向为空时自适应处理、DOA 估计等。  
E-mail: zhg598@hotmail.com



冯存前 男, 1975年生, 陕西富平人。空军工程大学防空反导学院教授、博士生导师, 博士, 主要研究方向为雷达信号处理及雷达电子战系统。  
E-mail: fengcunqian@sina.com



冯为可(通信作者) 男, 1992年生, 河南平顶山人。空军工程大学防空反导学院讲师, 博士, 主要研究方向为机载雷达信号处理。  
E-mail: fengweike007@163.com



刘成梁 男, 1997年生, 江西上饶人。空军工程大学防空反导学院硕士研究生, 主要研究方向为 DOA 估计。  
E-mail: liuchengliang1997@163.com