

# 非均匀噪声环境下基于 MISC 阵列的自适应波束形成方法

马立斯 何培宇 崔 敖 喻伟闯  
(四川大学电子信息学院, 四川成都 610065)

**摘 要:** 针对现有基于干扰加噪声协方差矩阵(Interference plus Noise Covariance Matrix, INCM)重建的自适应波束形成算法在非均匀噪声的情形中对于噪声功率估计不够准确的问题。本文在噪声非均匀的情况下, 提出了一种基于最大阵元间距约束(Maximum Inter-element Spacing Constraint, MISC)阵列的自适应波束形成算法。通过矩阵补全技术, 估计无噪声协方差矩阵和非均匀噪声协方差矩阵, 然后利用无噪声协方差矩阵估计入射信号的波达方向(Direction of Arrival, DOA)与功率, 最后重建 INCM。得益于矩阵补全技术对非均匀噪声功率的准确估计和 MISC 阵列虚拟差分优化阵提供的高自由度, 本文算法能够在非均匀噪声下更加准确地重建 INCM。仿真实验结果验证了所提算法的有效性。

**关键词:** MISC 阵列; 矩阵补全; 非均匀噪声; 自适应波束形成

**中图分类号:** TN911.72      **文献标识码:** A      **DOI:** 10.16798/j.issn.1003-0530.2022.02.006

**引用格式:** 马立斯, 何培宇, 崔敖, 等. 非均匀噪声环境下基于 MISC 阵列的自适应波束形成方法[J]. 信号处理, 2022, 38(2):268-275. DOI:10.16798/j.issn.1003-0530.2022.02.006.

**Reference format:** MA Lisi, HE Peiyu, CUI Ao, et al. Adaptive beamforming method based on MISC array in non-uniform noise[J]. Journal of Signal Processing, 2022, 38(2):268-275. DOI:10.16798/j.issn.1003-0530.2022.02.006.

## Adaptive Beamforming Method Based on MISC Array in Non-uniform Noise

MA Lisi HE Peiyu CUI Ao YU Weichuang

(College of Electronics and Information Engineering, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610065, China)

**Abstract:** The adaptive beamforming algorithm based on Interference plus Noise Covariance Matrix (INCM) reconstruction cannot accurately calculate the power of non-uniform noise. This paper proposes an adaptive beamforming algorithm based on Maximum Inter-element Spacing Constraint (MISC) array to address this problem. Firstly, the noise-free covariance matrix and the non-uniform noise covariance matrix are estimated using matrix completion technique. Then the noise-free covariance matrix is used to estimate the Direction of Arrival (DOA) and power of the incident signal. Finally, INCM is reconstructed. With the accurate estimation of the non-uniform noise power by the matrix completion technique and the high degree of freedoms provided by the MISC virtual difference co-array, the proposed algorithm can reconstruct INCM more accurately under non-uniform noise. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** MISC array; matrix completion; non-uniform noise; adaptive beamforming

## 1 引言

自适应波束形成是阵列信号处理中的一项基本技术,广泛地应用于雷达、声呐、射电天文学和无线通信等领域<sup>[1-4]</sup>。在实际中,由于接收信号快拍数的限制、期望信号角度失配、以及期望信号包含在接收数据中等原因,自适应波束形成器的性能会下降<sup>[5]</sup>。因此,增加自适应波束形成器的鲁棒性是很有必要的。

嵌套阵和互质阵是最具代表性的两种非均匀线阵(Nonuniform Linear Array, NLA),因为它们不仅能够有效地增加阵列孔径和自由度,还能够提供计算阵元位置的闭式表达式<sup>[6-8]</sup>。然而,由于嵌套阵中包含一个密集均匀线阵(Uniform Linear Array, ULA),对于物理阵元间的互耦效应较为敏感<sup>[9]</sup>。互质阵的物理阵元位置比嵌套阵更稀疏,但差分优化阵中存在“孔洞”,导致差分优化阵中连续阵元数的降低。最大阵元间距约束(Maximum Inter-element Spacing Constraint, MISC)阵列结合了互质阵与嵌套阵的优势,提供更大自由度的同时,物理阵元位置更加稀疏,进而有效的减小了互耦的影响<sup>[10]</sup>。因此,本文选择 MISC 阵列进行自适应波束形成器的设计。

目前的自适应波束形成主要集中在 ULA 中,对于 NLA 的自适应波束形成研究较少。文献[11]中提出了一种基于互质阵列的自适应波束形成方法,通过互质阵虚拟差分优化阵的 Capon 空间谱,估计入射信号的角度及功率,最后利用积分或者求和重建干扰加噪声协方差矩阵(Interference plus Noise Covariance Matrix, INCM),进而设计出两种波束形成器。然而使用差分优化阵的 Capon 空间谱来进行估计并不够准确,导致输出信干噪比有了一定的损失。文献[12]中提出了一种基于互质阵的自适应波束形成算法,通过将互质阵分解为两个稀疏均匀子阵来进行入射信号波达方向(Direction of Arrival, DOA)和功率的估计,然后重构 INCM。然而将互质阵进行分解,减少了原本阵列的自由度,可以利用的自由度受到子阵的传感器数量的限制。文献[13]中也提出了一种基于互质阵重建 INCM 的波束形成算法,但需要知道每个干扰的入射角度所在区域。文献[14]通过对互质阵虚拟差分优化阵的协

方差矩阵进行插值,从而填补差分阵“孔洞”中的信息,能够充分的利用差分优化阵的自由度,进而更加准确地重建 INCM。

然而,以上方法都是基于均匀噪声设计的。当每个传感器上的噪声功率不一样时,会导致以上方法对噪声功率估计不准确。这是因为以上方法都是以协方差矩阵的最小特征值作为噪声功率的估计,在非均匀噪声存在的情形中,这种估计会带来一定的误差,从而导致 INCM 的重建不够准确,最终影响波束形成器的性能。

因此,本文在各传感器噪声功率非均匀的背景下,提出了一种基于 MISC 阵列的自适应波束形成算法。通过矩阵补全技术得到无噪声协方差矩阵的估计,从而确定非均匀噪声协方差矩阵。然后,对信号的导向矢量和功率进行估计,进而重建 INCM。得益于估计的非均匀噪声协方差矩阵和 MISC 阵列虚拟差分优化阵提供的高自由度,本文算法能够在非均匀噪声环境下,更加准确地重建 INCM。仿真实验的结果验证了所提算法能够优于所有对比算法,获得更高的输出信干噪比。

## 2 MISC 阵列信号模型

MISC 阵列是基于给定阵元间距为任意数量的传感器构建的。设  $Pd$  表示最大的阵元间距,  $\Delta d$  表示阵元间距集,  $d = \lambda/2$ ,  $\lambda$  表示入射信号的波长。则 MISC 阵列传感器的位置可以由  $P$  和  $\Delta$  决定。MISC 阵列  $P$  和  $\Delta$  的表达式如下<sup>[10]</sup>:

$$P = 2 \left\lfloor \frac{M}{4} \right\rfloor + 2 \quad M \geq 5 \quad (1)$$

$$\Delta = \{1, P-3, \underbrace{P, \dots, P}_{M-P}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\frac{P-4}{2}}, 3, \underbrace{2, \dots, 2}_{\frac{P-4}{2}}\} \quad (2)$$

式(1)中,  $\lfloor \cdot \rfloor$  表示求方括号中有理数的整数部分,由  $P$  和  $\Delta$  可以得出 MISC 阵列的阵元位于  $h_i d$ , 其中  $h_i$  属于位置集  $S_{\text{MISC}}$ 。

MISC 阵列的阵列结构如图 1 所示。因此,对于任意给定的阵元数  $M (M \geq 5)$ , 可以算出对应的  $P$ , 进而确定阵列的  $S_{\text{MISC}}$ 。

MISC 阵列的差分优化阵位置集  $\mathbb{D}_{\text{MISC}}$  定义为:

$$\mathbb{D}_{\text{MISC}} = \{m_1 - m_2 \mid m_1, m_2 \in S_{\text{MISC}}\} \quad (3)$$

假设有  $K+1$  个非相关的远场窄带信号入射到

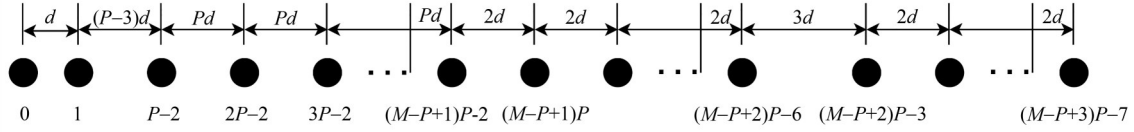


图1 MISC阵列结构图

Fig. 1 Illustration of the MISC array structure

由  $M$  个阵元组成的 MISC 阵列。其中,期望信号的入射角度为  $\theta_0$ ,  $K$  个干扰的入射角度分别为  $\{\theta_k, k = 1, 2, \dots, K\}$ 。则  $t$  时刻 MISC 阵列的接收信号为:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{a}(\theta_0)s_0(t)$ ,  $\mathbf{x}_i(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k)s_k(t)$ , 以及  $\mathbf{n}(t) \in \mathbf{C}^{M \times 1}$  分别表示统计独立的期望信号成分、干扰信号成分和噪声成分。 $s_k(t)$  表示第  $k$  个入射信号,  $\mathbf{a}(\theta_k) \in \mathbf{C}^{M \times 1}$  表示对应的信号导向矢量,  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$  表示不相关的零均值复高斯噪声矢量, 即  $\mathbf{n}(t) \sim \mathcal{CN}(0, \mathbf{Q})$ , 噪声协方差矩阵  $\mathbf{Q}$  为:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E}[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] = \text{diag}\{\mathbf{q}\} \in \mathbf{R}^{M \times M} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{E}[\cdot]$  表示求统计期望,  $(\cdot)^H$  表示共轭转置,  $\mathbf{q} = [q_1^2, q_2^2, \dots, q_M^2]^T$ ,  $q_m^2$  表示第  $m$  个阵元上的噪声功率,  $\text{diag}\{\cdot\}$  表示由括号内元素构成的对角矩阵。

MISC 阵列输出信干噪比 (Signal to Interference plus Noise Ratio, SINR) 为:

$$\text{SINR} = \frac{\sigma_0^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w}} \quad (6)$$

式中,  $\sigma_0^2 = \mathbf{E}\{|s_0(t)|^2\}$  表示期望信号的功率,  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T \in \mathbf{C}^{M \times 1}$  表示波束形成器的权矢量,  $\mathbf{R}_{i+n} \in \mathbf{C}^{M \times M}$  表示干扰加噪声协方差矩阵:

$$\mathbf{R}_{i+n} = \mathbf{E}\{(\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t))(\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t))^H\} = \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \mathbf{a}(\theta_k) \mathbf{a}^H(\theta_k) + \mathbf{Q} \quad (7)$$

式中,  $\sigma_k^2$  表示第  $k$  个干扰的功率。最大化式(6)中的阵列输出 SINR, 可以等效为保持期望信号不失真的前提下, 最小化阵列干扰加噪声的输出功率:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w} \quad \text{subject to} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \quad (8)$$

该最小化问题的解为<sup>[15]</sup>:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} \quad (9)$$

### 3 提出算法

本文提出了一种非均匀噪声情况下, 基于 MISC 阵列的自适应波束形成算法。从波束形成器权矢量表达式(9)可以看出, 权矢量  $\mathbf{w}$  取决于  $\mathbf{R}_{i+n}$  和  $\mathbf{a}(\theta_0)$ 。在知道具体阵列结构的前提下,  $\mathbf{a}(\theta_0)$  取决于期望信号的 DOA 估计  $\theta_0$ ; 根据  $\mathbf{R}_{i+n}$  的计算公式(7), 重建 INCM 需要干扰信号的 DOA 估计  $\theta_k (k = 1, 2, \dots, K)$ , 对应的干扰功率  $\sigma_k^2 (k = 1, 2, \dots, K)$ , 以及  $\mathbf{Q}$ 。

因此, 本文通过估计无噪声协方差矩阵, 得到  $\mathbf{Q}$ ; 然后, 基于估计的无噪声协方差矩阵, 对各信号的入射角度和功率进行估计, 进而得到期望信号的导向矢量, 重建 INCM; 最后计算出波束形成器的权矢量。

#### 3.1 无噪声协方差矩阵的估计

阵列接收信号协方差矩阵为:

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{Q} \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{R}_0$  定义为无噪声协方差矩阵:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{A} \mathbf{P}_s \mathbf{A}^H \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)] \in \mathbf{C}^{M \times (K+1)}$ ,  $\mathbf{P}_s = \text{diag}\{\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2\} \in \mathbf{R}^{(K+1) \times (K+1)}$  分别表示阵列流形矩阵和入射信号协方差矩阵。

对于一个低秩矩阵, 知道矩阵中的部分元素, 可以通过矩阵补全精确的恢复出未知的元素<sup>[16-17]</sup>。而当我们知道  $\mathbf{R}$  时, 就几乎知道了  $\mathbf{R}_0$  除了对角元素以外的元素。因此,  $\mathbf{R}_0$  的估计可以看作一个矩阵补全问题。然而, 要将  $\mathbf{R}_0$  准确的从  $\mathbf{R}$  中恢复出来, 要求  $K+1$  比  $M$  小很多。为了保证能够准确的从  $\mathbf{R}$  中获得  $\mathbf{R}_0$  和  $\mathbf{Q}$ , 需要满足<sup>[18]</sup>:

$$K+1 < \frac{M}{2} \quad (12)$$

根据以上分析,  $\mathbf{R}_0$  的估计可以通过求解一下秩最小优化问题<sup>[19]</sup>:

$$\min_{\mathbf{R}_0} \text{rank}(\mathbf{R}_0) \quad \text{subject to} \quad \mathcal{A}(\mathbf{R}_0) = \mathcal{A}(\mathbf{R}) \quad (13)$$

式中,  $\mathcal{A}(\cdot)$  表示矩阵的所有主对角元素由0代替, 其余元素不变,  $\text{rank}(\cdot)$  表示求括号内矩阵的秩。由于矩阵秩的优化问题是 NP-hard 问题, 通常使用核范数最小化来近似求解<sup>[16-17]</sup>。又因为  $\mathbf{R}_0$  是半正定 Hermitian 矩阵:

$$\|\mathbf{R}_0\|_* = \text{trace}(\mathbf{R}_0) \quad (14)$$

式中,  $\|\cdot\|_*$  表示矩阵的核范数,  $\text{trace}(\cdot)$  表示矩阵的迹。同时考虑到实际中, 由于快拍数的限制, 通常使用采样协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$  代替  $\mathbf{R}$ , 式(13)中的等式约束难以满足, 故式(13)可以等效为<sup>[19]</sup>:

$$\min_{\mathbf{R}_0} \text{trace}(\mathbf{R}_0) \quad \text{subject to} \quad \|\mathbf{J} \oplus (\mathbf{R}_0 - \hat{\mathbf{R}})\|_F \leq \xi \quad (15)$$

式中,  $\|\cdot\|_F$  表示 Frobenius 范数,  $\oplus$  表示 Hadamard 积运算,  $\mathbf{J}$  是一个  $M \times M$  的矩阵, 主对角线全为0, 其余元素都是1,  $\xi > 0$  是一个常数。

求解式(15), 可以得到无噪声协方差矩阵的估计  $\hat{\mathbf{R}}_0$ , 则噪声协方差矩阵可以估计为:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathcal{D}(\hat{\mathbf{R}} - \hat{\mathbf{R}}_0) \quad (16)$$

式中,  $\mathcal{D}(\cdot)$  表示由括号内矩阵主对角元素组成的对角矩阵。

### 3.2 入射信号 DOA 和功率的估计

向量化无噪声协方差矩阵的估计  $\hat{\mathbf{R}}_0$  得:

$$\mathbf{z} = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_0) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{g} \quad (17)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}^*(\theta_0) \otimes \mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}^*(\theta_1) \otimes \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}^*(\theta_K) \otimes \mathbf{a}(\theta_K)]$ ,  $\otimes$  表示 Kronecker 积运算,  $(\cdot)^*$  表示共轭,  $\mathbf{g} = [\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2]^T$ 。去除  $\mathbf{z}$  中重复行, 并根据差分优化阵位置集重新排序得  $\tilde{\mathbf{z}}$ :

$$\langle \tilde{\mathbf{z}} \rangle_i = \frac{1}{|\mathbb{M}(i)|} \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{M}(i)} \left\langle \hat{\mathbf{R}}_0 \right\rangle_{\text{Ind}(m_1), \text{Ind}(m_2)} \quad i \in \mathbb{D}_{\text{MISC}} \quad (18)$$

式中,  $\langle \tilde{\mathbf{z}} \rangle_i$  表示差分优化阵中位置为  $id$  处传感器阵元接收信号的值,  $\left\langle \hat{\mathbf{R}}_0 \right\rangle_{\text{Ind}(m_1), \text{Ind}(m_2)}$  表示矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_0$  中第  $\text{Ind}(m_1)$  行  $\text{Ind}(m_2)$  列的元素,  $\text{Ind}(m_1)$  与  $\text{Ind}(m_2)$  分别表示  $m_1$  与  $m_2$  在位置集  $\mathbb{S}_{\text{MISC}}$  中的位置索引,  $|\mathbb{M}(i)|$  表示集合  $\mathbb{M}(i)$  的基数, 集合  $\mathbb{M}(i)$  表示所有差为  $i$  的  $(m_1, m_2)$  组合, 即:

$$\mathbb{M}(i) = \{(m_1, m_2) \in \mathbb{S}_{\text{MISC}}^2 | m_1 - m_2 = i\} \quad i \in \mathbb{D}_{\text{MISC}} \quad (19)$$

通过  $\tilde{\mathbf{z}}$  构建一个如下的 Toeplitz 矩阵  $\mathbf{R}_v$ :

$$\mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} \langle \tilde{\mathbf{z}} \rangle_0 & \langle \tilde{\mathbf{z}} \rangle_{-1} & \cdots & \langle \tilde{\mathbf{z}} \rangle_{-\bar{M}} \\ \langle \tilde{\mathbf{z}} \rangle_1 & \langle \tilde{\mathbf{z}} \rangle_0 & \cdots & \langle \tilde{\mathbf{z}} \rangle_{-\bar{M}+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \tilde{\mathbf{z}} \rangle_{\bar{M}} & \langle \tilde{\mathbf{z}} \rangle_{\bar{M}-1} & \cdots & \langle \tilde{\mathbf{z}} \rangle_0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中,  $\bar{M} = (M - P + 3)P - 7$ 。对  $\mathbf{R}_v$  进行特征值分解得:

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{U}_s \Sigma_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \Sigma_n \mathbf{U}_n^H \quad (21)$$

式中,  $\Sigma_s \in \mathbf{C}^{(K+1) \times (K+1)}$  和  $\mathbf{U}_s \in \mathbf{C}^{(\bar{M}+1) \times (K+1)}$  分别表示由  $\mathbf{R}_v$  的  $K+1$  个大特征值构成的对角矩阵和其对应的  $K+1$  个特征向量构成的矩阵,  $\Sigma_n \in \mathbf{C}^{(\bar{M}-K) \times (\bar{M}-K)}$  和  $\mathbf{U}_n \in \mathbf{C}^{(\bar{M}+1) \times (\bar{M}-K)}$  分别表示由  $\mathbf{R}_v$  的  $\bar{M}-K$  个小特征值构成的对角矩阵和其对应的  $\bar{M}-K$  个特征向量构成的矩阵。

因此, MUSIC 空间谱为:

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{v}^H(\theta) \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{v}(\theta)} \quad (22)$$

式中,  $\mathbf{v}(\theta)$  是虚拟差分优化阵的导向矢量:

$$\mathbf{v}(\theta) = \left[ 1, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}M d \sin \theta} \right]^T \quad (23)$$

因此, 可以通过寻找空间谱  $P_{\text{MUSIC}}$  的谱峰来估计入射信号的 DOA。假设期望信号的入射角度位于角度范围  $\Theta$  中, 而  $\bar{\Theta}$  是  $\Theta$  以外的所有角度区域。则  $\Theta$  中的最大谱峰为期望信号的 DOA 估计  $\hat{\theta}_0$ , 而  $\bar{\Theta}$  中最大的  $K$  个谱峰分别为  $K$  个干扰信号的 DOA 估计  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_K$ 。

入射信号功率的估计, 可以通过求解如下的最小二乘问题:

$$\min_{\Gamma} \left\| \hat{\mathbf{R}}_0 - \mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \Gamma \mathbf{A}^H(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\|_F^2 \quad \text{subject to} \quad \Gamma \geq 0 \quad (24)$$

式中,  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_K]^T$ , 变量  $\Gamma = \text{diag}([\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_1^2, \dots, \hat{\sigma}_K^2])$  表示入射信号功率的估计。该最小二乘问题可以使用 Matlab CVX 工具箱<sup>[20]</sup>求解。

然后, 干扰加噪声协方差矩阵可以重建为:

$$\hat{\mathbf{R}}_{i+n} = \sum_{k=1}^K \hat{\sigma}_k^2 \mathbf{a}(\hat{\theta}_k) \mathbf{a}^H(\hat{\theta}_k) + \hat{\mathbf{Q}} \quad (25)$$

将估计的  $\mathbf{a}(\hat{\theta}_0)$  和重建的  $\hat{\mathbf{R}}_{i+n}$  带入式(9), 就得到了本文提出波束形成器的权矢量:

$$\mathbf{w}_{\text{pro}} = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\hat{\theta}_0)}{\mathbf{a}^H(\hat{\theta}_0) \hat{\mathbf{R}}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\hat{\theta}_0)} \quad (26)$$

本文提出算法的主要步骤如下:

1) 根据接收的信号数据, 计算采样协方差

矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$ 。

2) 求解式(15)获得无噪声协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_0$ , 并根据式(16)计算噪声协方差矩阵  $\hat{\mathbf{Q}}$ 。

3) 向量化  $\hat{\mathbf{R}}_0$  得到虚拟差分优化阵接收矢量  $\mathbf{z}$ , 去除  $\mathbf{z}$  中重复行并重新排序得  $\tilde{\mathbf{z}}$ 。

4) 用  $\tilde{\mathbf{z}}$  构建 Toeplitz 矩阵  $\mathbf{R}_v$ , 对  $\mathbf{R}_v$  进行特征值分解, 用式(22)得到 MUSIC 空间谱。

5) 通过谱峰搜索, 获得所有信号的 DOA 估计, 进而得到对应的信号导向矢量。

6) 求解最小二乘问题式(24), 得到信号的功率估计  $\mathbf{I}$ 。

7) 用式(25)重建干扰加噪声协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_{i+n}$ 。

8) 将  $\mathbf{a}(\hat{\theta}_0)$  和  $\hat{\mathbf{R}}_{i+n}$  带入式(26)中获得提出波束形成器的权矢量。

#### 4 仿真实验

本节通过输出 SINR 的比较来评估本文所提方法的性能。在所有仿真实验中, 均采用阵元数  $M = 10$  的 MISC 阵列, 即各物理阵元分别位于  $[0, 1, 4, 10, 16, 22, 28, 30, 33, 35]d$ 。假设期望信号的入射角度  $\theta_0 = 5^\circ$ , 两个干扰信号的入射角度分别假设为  $\theta_1 = -50^\circ, \theta_2 = -20^\circ$ 。噪声在空间上是非均匀的, 协方差矩阵  $\mathbf{Q} = \text{diag}\{\mathbf{q}\}$ , 其中:

$$\mathbf{q} = [30.0, 2.0, 1.5, 1, 6.0, 11, 5.1, 21.5, 4.0, 9.0]^T \quad (27)$$

信噪比(signal-to-noise ratio, SNR)与干噪比(interference-to-noise ratio, INR)分别定义为:

$$\text{SNR} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\sigma_0^2}{q_m^2} \quad (28)$$

$$\text{INR} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\sigma_k^2}{q_m^2} \quad (29)$$

每个传感器上的 INR 为 30 dB。对于输出 SINR 的比较, 当输入 SNR 变化时, 快拍数固定为 500; 当快拍数变化时, 输入 SNR 固定为 20 dB。对于情况 3, 输入 SNR 固定为 20 dB, 快拍数固定为 500。每一种情况均进行了 500 次蒙特卡洛实验。

本文算法与对角加载波束形成算法<sup>[21]</sup>, 基于特征子空间的波束形成算法<sup>[22]</sup>, 求和重构波束形成算法<sup>[11]</sup>, 插值重构波束形成算法<sup>[14]</sup>进行对比。需要指出的是, 虽然所有方法都使用了 MISC 阵列的接收信号, 但每一个对比算法还是采用它们各自的方法获取对应的权矢量。此外, 由于  $\mathbb{D}_{\text{MISC}}$  没有“孔洞”,

故对于插值重构算法, 省去了插值步骤。对于本文算法与[11, 14]中的算法, 假设期望信号入射角度所在范围  $\Theta = [\theta_0 - 5^\circ, \theta_0 + 5^\circ]$ , 则  $\bar{\Theta} = [-90^\circ, \theta_0 - 5^\circ] \cup (\theta_0 + 5^\circ, 90^\circ]$ , 参数  $\xi = 1$ 。对于对角加载算法, 对角加载因子为  $10\bar{q}$ ,  $\bar{q} = \sum_{m=1}^M q_m/M$ 。CVX 工具箱<sup>[20]</sup>用于求解所有算法中的优化问题。

#### 4.1 情况 1: 准确知道期望信号导向矢量

在第一种情况中, 假设准确知道期望信号的导向矢量。每一种算法的输出 SINR 与输入 SNR 和快拍数的关系分别如图 2 和图 3 所示。

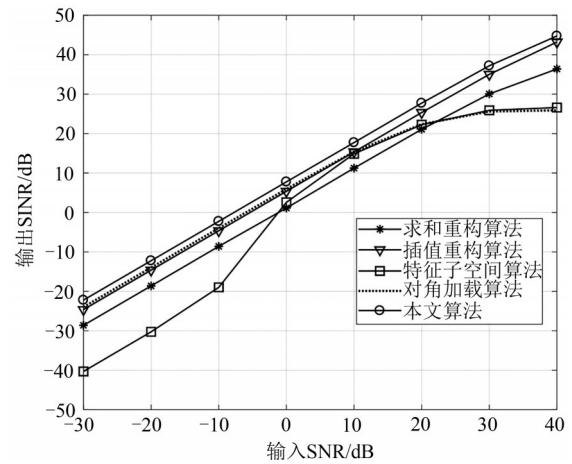


图2 输出 SINR 随输入 SNR 变化对比

Fig. 2 Output SINR versus input SNR

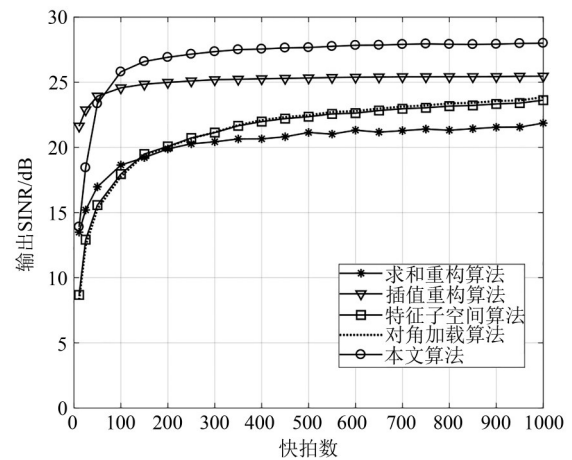


图3 输出 SINR 随快拍数变化对比

Fig. 3 Output SINR versus the number of snapshots

从图 2 可以看出, 所有算法的输出 SINR 均随着输入 SNR 的增加而增加, 但对角加载算法和特征子空间算法在高 SNR 时输出 SINR 逐渐趋向平缓, 这是由于算法所采用的采样协方差矩阵中包含有期

望信号成分,出现了信号自相消现象,导致输出 SINR 有了一定的损失,并且随着输入 SNR 的增加,输出 SINR 的损失变得更加明显。剩下的三种算法基于重建的思想,去除了 INCM 中的期望信号成分,所以能够有效的克服信号自相消问题,即使在高 SNR 时也能获得较好的结果。相较于求和重构算法和插值重构算法,本文算法由于通过矩阵补全算法对非均匀噪声的功率进行了准确的估计,以及 MISC 阵列虚拟差分优化阵提供了高自由度,能够更加准确地重建 INCM,所以能够在整个输入 SNR 变化范围内得到最优的结果。从图 3 可以看出,当快拍数在 100 到 1000 之间时,本文算法能够优于其他所有对比算法,输出 SINR 更高。

#### 4.2 情况 2: 观测方向存在随机误差

在第二种情况中,假设所有入射信号的观测方向误差在  $[-4^\circ, 4^\circ]$  中均匀分布。期望信号的真实入射角度为  $[1^\circ, 9^\circ]$  中的任意值,两个干扰信号的真实入射角度分别为  $[-54^\circ, -46^\circ]$  和  $[-24^\circ, -16^\circ]$  中的任意值。信号的入射角度在不同的蒙特卡洛实验中变化,但在每一次蒙特卡洛实验中固定不变。每一种算法的输出 SINR 与输入 SNR 和快拍数的关系分别如图 4 和图 5 所示。

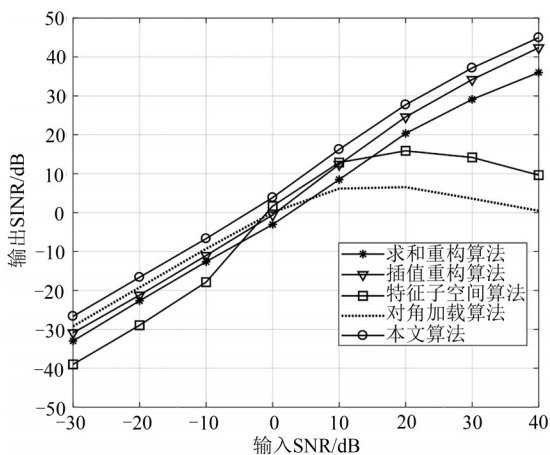


图 4 输出 SINR 随输入 SNR 变化对比

Fig. 4 Output SINR versus input SNR

从图 4 可以看出,由于采样协方差矩阵中的期望信号成分,以及信号观测方向存在的误差,对角加载算法和特征子空间算法在高信噪比时产生了较大的性能损失。由于 MISC 阵列虚拟差分优化阵提供了更高的自由度,本文算法能够更加准确地估

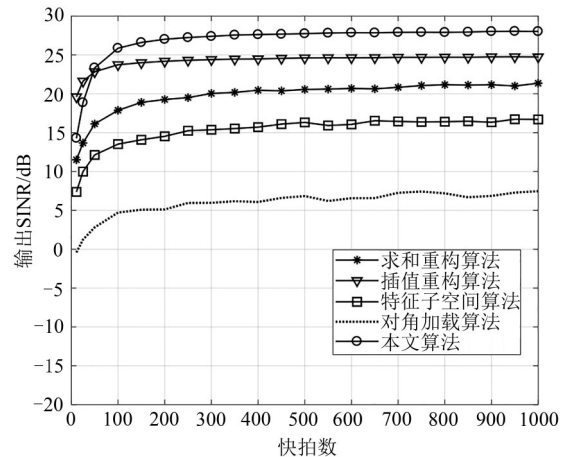


图 5 输出 SINR 随快拍数变化对比

Fig. 5 Output SINR versus the number of snapshots

计信号导向矢量和功率;同时,还对非均匀噪声的协方差矩阵进行了准确估计,从而能够更加准确地重建 INCM。因此,本文算法所得结果优于求和重构算法和插值重构算法。从图 5 可以看出,当快拍数在 100 到 1000 之间时,本文算法能够优于其他所有对比算法。

#### 4.3 情况 3: 非均匀噪声环境的影响

在情况 3 中,比较了不同非均匀噪声环境下,各算法的输出性能。定义最差噪声功率比  $WNPR = \sigma_{\max}^2 / \sigma_{\min}^2$ ,其中  $\sigma_{\max}^2$ 、 $\sigma_{\min}^2$  分别表示各传感器中的最大和最小噪声功率。假设各传感器上的噪声功率从 1 到  $\sigma_{\max}^2$  线性增加,即第  $m$  个传感器上的噪声功率  $\sigma_m^2 = 1 + (\sigma_{\max}^2 - 1)(m - 1)/(M - 1)$ ,随着  $\sigma_{\max}^2$  从 1 到 100 变化,WNPR 也从 1 到 100 变化,当  $\sigma_{\max}^2 = 1$  时,阵列上的噪声功率相等。准确知道期望信号导向矢量、观测方向存在  $[-4^\circ, 4^\circ]$  随机误差两种情况下,每一种算法的输出 SINR 与 WNPR 的关系分别如图 6(a)和(b)所示。

从图 6(a)和(b)可以看出,对于这两种情况,由于通过矩阵补全估计了噪声协方差矩阵  $\hat{Q}$ ,准确估计了非均匀噪声的功率,同时 MISC 阵列虚拟差分优化阵提供了更高的自由度,对入射信号的 DOA 与功率估计更加准确,本文算法能够在非均匀噪声情形中更加准确地重建 INCM。因此,从图中能够看到,当  $1 < WNPR \leq 100$  时,本文算法能够获得比其他对比算法更好的结果。

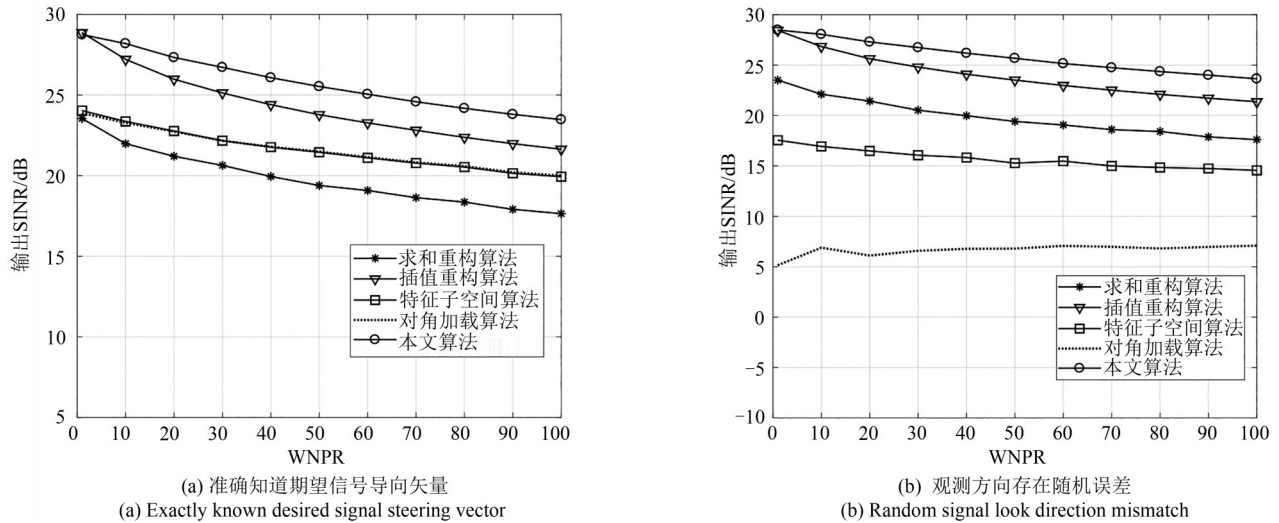


图6 输出 SINR 随 WNPR 变化对比

Fig. 6 Output SINR versus WNPR

## 5 结论

本文在非均匀噪声背景下,提出了一种基于 MISC 阵列的自适应波束形成算法。由于通过矩阵补全技术,对非均匀噪声功率进行了准确的估计,以及 MISC 阵列虚拟差分优化阵提供的更高自由度,本文算法能够在非均匀噪声情形中更加准确地重建干扰加噪声协方差矩阵。仿真实验也验证了本文所提算法能够在存在非均匀噪声和信号观测方向随机误差时,优于对比算法,输出 SINR 更高。然而,本文算法引入矩阵补全技术估计噪声功率,限制了入射信号的个数,当入射信号个数多于阵元个数的一半时,估计性能将有所下降。如何在入射信号较多时,准确地估计出非均匀噪声的功率还有待未来进一步的研究。

### 参考文献

- [1] XU Jingwei, LIAO Guisheng, HUANG Lei, et al. Robust adaptive beamforming for fast-moving target detection with FDA-STAP radar[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(4): 973-984.
- [2] ALBRIGHT BLOMBERG A E, AUSTENG A, HANSEN R E, et al. Improving sonar performance in shallow water using adaptive beamforming[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2013, 38(2): 297-307.
- [3] ELLINGSON S W. Beamforming and interference canceling with very large wideband arrays[J]. IEEE Transac-

tions on Antennas and Propagation, 2003, 51(6): 1338-1346.

- [4] XIAO Zhenyu, ZHU Lipeng, CHOI J, et al. Joint power allocation and beamforming for non-orthogonal multiple access (NOMA) in 5G millimeter wave communications[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2018, 17(5): 2961-2974.
- [5] 周成伟, 郑航, 顾宇杰, 等. 互质阵列信号处理研究进展: 波达方向估计与自适应波束成形[J]. 雷达学报, 2019, 8(5): 558-577.  
ZHOU Chengwei, ZHENG Hang, GU Yujie, et al. Research progress on coprime array signal processing: Direction-of-Arrival estimation and adaptive beamforming[J]. Journal of Radars, 2019, 8(5): 558-577.(in Chinese)
- [6] 牟仕林. 非均匀稀疏阵 DOA 估计研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2020.  
MU Shilin. Research on DOA estimation of non-uniform sparse arrays [D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2020.(in Chinese)
- [7] PAL P, VAIDYANATHAN P P. Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(8): 4167-4181.
- [8] VAIDYANATHAN P P, PAL P. Sparse sensing with coprime samplers and arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(2): 573-586.
- [9] GUPTA I, KSIENSKI A. Effect of mutual coupling on the performance of adaptive arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1983, 31(5): 785-791.

- [10] ZHENG Zhi, WANG Wenqin, KONG Yangyang, et al. MISC array: A new sparse array design achieving increased degrees of freedom and reduced mutual coupling effect [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(7): 1728-1741.
- [11] ZHOU Chengwei, SHI Zhiguo, GU Yujie. Coprime array adaptive beamforming with enhanced degrees-of-freedom capability [C]//2017 IEEE Radar Conference (Radar-Conf). Seattle, WA, USA. IEEE, 2017: 1357-1361.
- [12] ZHOU Chengwei, GU Yujie, HE Shibo, et al. A robust and efficient algorithm for coprime array adaptive beamforming [J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2018, 67(2): 1099-1112.
- [13] LIU Ke, ZHANG Y D. Coprime array-based robust beamforming using covariance matrix reconstruction technique [J]. *IET Communications*, 2018, 12(17): 2206-2212.
- [14] ZHENG Zhi, YANG Tong, WANG Wenqin, et al. Robust adaptive beamforming via coprime coarray interpolation [J]. *Signal Processing*, 2020, 169: 107382.
- [15] CAPON J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1969, 57(8): 1408-1418.
- [16] CANDÈS E J, RECHT B. Exact matrix completion via convex optimization [J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2009, 9(6): 717-772.
- [17] CANDES E J, PLAN Y. Matrix completion with noise [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2010, 98(6): 925-936.
- [18] LIAO Bin, HUANG Lei, GUO Chongtao, et al. New approaches to direction-of-arrival estimation with sensor arrays in unknown nonuniform noise [J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, 16(24): 8982-8989.
- [19] LIAO Bin, GUO Chongtao, HUANG Lei, et al. Matrix completion based direction-of-arrival estimation in nonuniform noise [C]//2016 IEEE International Conference on Digital Signal Processing (DSP). Beijing, China. IEEE, 2016: 66-69.
- [20] GRANT M, BOYD S, YE Y. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1, 2014, Jun. [Online]. Available: <http://cvxr.com/cvx>.
- [21] COX H, ZESKIND R, OWEN M. Robust adaptive beamforming [J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1987, 35(10): 1365-1376.
- [22] FELDMAN D D, GRIFFITHS L J. A projection approach for robust adaptive beamforming [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(4): 867-876.

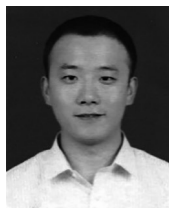
### 作者简介



马立斯 男,1994年生,云南人。四川大学电子信息学院硕士研究生,主要研究方向为波束形成、麦克风阵列信号处理。  
E-mail: malisi1994@qq.com



何培宇(通讯作者) 女,1963年生,四川人。四川大学教授,博士生导师,主要研究方向为麦克风阵列信号处理、语音/声信号分析与处理及其应用等。  
E-mail: hpysbsy@163.com



崔敖 男,1990年生,陕西人。四川大学电子信息学院硕士研究生,主要研究方向为波达方向角估计、波束形成技术、自适应信号处理技术等。  
E-mail: legendaryleo@163.com



喻伟国 男,1982年生,湖北人。四川大学电子信息学院博士研究生,主要研究方向为波束形成技术、波达方向角估计、自适应信号处理技术等。  
E-mail: tryo@163.com