

# 脉冲噪声下基于中值离差相关熵的 DOA 估计方法

戴江安<sup>1</sup> 邱天爽<sup>1</sup> 田 全<sup>2</sup> 蔡睿妍<sup>2</sup>

(1. 大连理工大学电子信息与电气工程学部, 辽宁大连 116024; 2. 台州学院电子与信息工程学院, 浙江台州 318000)

**摘 要:** 作为阵列信号处理的一个基本问题, 波达方向估计在现代通信领域有着广泛的应用。常规估计方法通常基于高斯噪声假设。而当阵列接收数据包含 Alpha 稳定分布脉冲噪声时算法将完全失效。针对 Alpha 稳定分布噪声下的波达方向估计问题, 本文定义了一种改进的相关熵算子——中值离差相关熵, 并从理论上证明了它的有界性。以此为基础结合 MUSIC 算法提出了一种波达方向估计新方法。该方法不需要噪声先验知识, 且在脉冲噪声环境中具有鲁棒性。仿真实验表明, 即使在短快拍、强脉冲噪声的恶劣环境下, 本文方法依然具有良好的性能。

**关键词:** 波达方向估计; 脉冲噪声; Alpha 稳定分布; 相关熵

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **DOI:** 10.16798/j.issn.1003-0530.2021.10.015

**引用格式:** 戴江安, 邱天爽, 田全, 等. 脉冲噪声下基于中值离差相关熵的 DOA 估计方法[J]. 信号处理, 2021, 37(10): 1914-1922. DOI: 10.16798/j.issn.1003-0530.2021.10.015.

**Reference format:** DAI Jiang'an, QIU Tianshuang, TIAN Quan, et al. Direction of arrival estimation method using deviation from the median based correntropy under impulsive noise[J]. Journal of Signal Processing, 2021, 37(10): 1914-1922. DOI: 10.16798/j.issn.1003-0530.2021.10.015.

## Direction of Arrival Estimation Method Using Deviation from the Median Based Correntropy Under Impulsive Noise

DAI Jiang'an<sup>1</sup> QIU Tianshuang<sup>1</sup> TIAN Quan<sup>2</sup> CAI Ruiyan<sup>2</sup>

(1. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;  
2. School of Electronics and Information Engineering, Taizhou University, Taizhou, Zhejiang 318000, China)

**Abstract:** As a fundamental issue of array signal processing, direction of arrival estimation is widely applied in contemporary communication. Conventional direction of arrival estimation schemes are primarily developed under Gaussian noise assumptions. However, when the received signal contains alpha-stable distribution impulsive noise, second order statistics will become unbounded and the conventional direction of arrival estimation schemes will become ineffective. To overcome this defect, a modified correntropy operator——deviation from the median based correntropy is first defined and its boundedness property is proved to ensure its validity in the alpha-stable distribution noise environment. Based on the modified correntropy operator and MUSIC algorithm, a novel direction of arrival estimation method is proposed. The proposed scheme not only requires no prior knowledge of background noise but also shows robustness to the impulsiveness of noise. Comprehensive Monte Carlo simulations verify the superior performance of the proposed method under many impulsive noise scenario, even when there are few snapshots and the impulsiveness of noise is strong.

**Key words:** direction of arrival estimation; impulsive noise; alpha-stable distribution; correntropy

## 1 引言

波达方向(Direction Of Arrival, DOA)是指空间信号的到达方向,它是无线被动定位中常用的特征

参数之一。DOA 估计的任务就是确定同时处在空间某一区域内多个感兴趣信号的空间位置。作为阵列信号处理的一个基本问题和研究热点,DOA 估计在无线电监测、雷达、水下通信以及麦克风阵列

信号处理等领域发挥着重要的作用<sup>[1-3]</sup>。

早期的 DOA 估计方法受到阵列尺寸的影响,估计分辨率无法超过瑞利限。Schmidt<sup>[4]</sup>提出的多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)算法解决了这一问题,将 DOA 估计带入了超分辨时代。针对 MUSIC 算法中谱峰搜索步骤计算复杂度较高的问题,Roy 等人<sup>[5]</sup>利用子空间旋转不变技术提出了 ESPRIT 算法。以 MUSIC 算法和 ESPRIT 算法为基础,近几十年来 DOA 估计领域涌现了大量研究成果。

常规 DOA 估计方法大多基于背景噪声符合高斯分布假设,然而实际应用中通常存在大量具有尖峰脉冲特性的非高斯噪声,如大气噪声、水声噪声、汽车点火、多用户干扰等。这些脉冲噪声的概率密度函数比高斯分布衰减得慢,具有较厚的拖尾,在这种环境下常规 DOA 方法性能会严重下降甚至失效。用于描述脉冲噪声的常见模型有混合高斯分布、广义高斯分布和 Alpha 稳定分布<sup>[6]</sup>。而其中 Alpha 稳定分布是唯一满足广义中心极限定理的分布,并且与许多实际数据相吻合。因此,使用 Alpha 稳定分布对脉冲噪声建模更具有普遍意义。

针对脉冲噪声环境中的 DOA 估计已有一些研究,基于分数低阶统计量(Fractional Lower-Order Statistics, FLOS)的方法属于其中比较有效的一类<sup>[7]</sup>。例如, Tsakalides 等人<sup>[8]</sup>基于共变提出的 ROC-MUSIC(Robust Covariation-Based MUSIC)算法; Liu 等人<sup>[9]</sup>基于分数低阶矩(Fractional Lower-Order Moment, FLOM)提出的 FLOM-MUSIC 算法; Belkacemi 等人<sup>[10]</sup>基于相位分数低阶矩(Phased Fractional Lower-Order Moment, PFLOM)提出的 PFLOM-MUSIC 算法。然而由于需要稳定分布特征指数的先验知识,基于 FLOS 的方法存在一定的局限性。近年来,一种称为相关熵<sup>[11-13]</sup>的局部相似性测度在非高斯信号处理领域获得了广泛关注。利用核函数的特性,相关熵对脉冲噪声有很好的抑制作用,且不需要噪声的先验知识。Zhang 等人<sup>[14]</sup>提出基于相关熵的相关(Correntropy Based Correlation, CRCO)的概念,并结合 MUSIC 算法提出 CRCO-MUSIC 算法。Guan 等人<sup>[15]</sup>利用 CRCO 实现了脉冲噪声环境下相干信源的 DOA 估计。Jin 等人<sup>[16]</sup>基于相关熵对协方差进行改进,并提出了 CBCM-MUSIC(Correntropy-Based Covariance matrix MUSIC)算法。虽然以上算法在抗噪性能以及信号适用性方面有较好的效果,但是在信号快拍数较少、噪声脉冲性较强的情况

下,算法性能有待进一步提高。

为了更好地抑制 Alpha 稳定分布脉冲噪声,受相关熵理论的启发,本文首先定义了一种改进的相关熵算子——中值离差相关熵(Deviation from the Median based Correntropy, DMCE)。依据相关熵算子的特性,DMCE 可以有效解决了 Alpha 稳定分布噪声下协方差矩阵发散的问题,理论证明表明了 DMCE 的有界性。在此基础上,本文基于 DMCE 构造伪协方差矩阵,同时结合 MUSIC 算法子空间分解的思想,提出了一种适用于 Alpha 稳定分布噪声下 DOA 估计的新方法,称为 DMCE-MUSIC。该方法不需要噪声先验知识,且在短快拍、强脉冲环境下具有鲁棒性,仿真实验验证了本文算法的良好性能。

## 2 信号和噪声模型

### 2.1 信号模型

考虑  $P$  个窄带信源入射到由  $M$  个阵元组成的均匀等距线阵,阵元间距为  $d$ 。以第一个阵元为参考阵元,则第  $m$  个阵元  $t$  时刻的输出可以表示为:

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^P s_i(t) e^{j2\pi \sin \theta_i (m-1)d/\lambda} + n_m(t), \quad m=1, 2, \dots, M \quad (1)$$

式中,  $s_i(t)$  表示第  $i$  个人射信号,  $\theta_i$  表示其波达方向。  $\lambda$  表示信号波长,且满足“半波长”条件  $d \leq \lambda/2$ 。  $n_m(t)$  表示第  $m$  个阵元包含的加性噪声。

式(1)可以进一步表示为如下的矩阵形式:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(1) \ \mathbf{x}(2) \ \dots \ \mathbf{x}(N)]$  表示阵列接收数据矩阵,  $N$  为快拍数,  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_M(t)]^T$  为  $t$  时刻的接收数据矢量,  $(\cdot)^T$  表示求转置运算。  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}(1) \ \mathbf{s}(2) \ \dots \ \mathbf{s}(N)]$  表示入射信源矩阵,其中  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_P(t)]^T$  为  $t$  时刻的信源矢量。  $\mathbf{N} = [\mathbf{n}(1) \ \mathbf{n}(2) \ \dots \ \mathbf{n}(N)]$  表示阵列接收噪声矩阵,其中  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \ n_2(t) \ \dots \ n_M(t)]^T$  为  $t$  时刻的噪声矢量。  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \dots \ \mathbf{a}(\theta_P)]$  表示阵列流形矩阵,其中  $\mathbf{a}(\theta_i) = [1 \ \dots \ e^{j2\pi \sin \theta_i (m-1)d/\lambda} \ \dots \ e^{j2\pi \sin \theta_i (M-1)d/\lambda}]^T$  为第  $i$  个信源的方向矢量。

DOA 估计问题的任务即在给定阵列接收数据矩阵  $\mathbf{X}$  的情况下,估计出  $P$  个信源的波达方向  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P$ 。

### 2.2 Alpha 稳定分布

本文中脉冲噪声采用 Alpha 稳定分布模型<sup>[17]</sup>。由于没有闭式的概率密度函数,Alpha 稳定分布通常由特征函数进行表征,其表达式如下:

$$\varphi(t) = \exp\{j\mu t - \gamma |t|^\alpha [1 + j\beta \operatorname{sgn}(t)\omega(t, \alpha)]\} \quad (3)$$

式中,

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}, \quad \omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log |t| & \alpha = 1 \end{cases}$$

由式(3)可以看出,特征函数由 $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ 四个参数决定。其中参数 $\alpha$ 称为特征指数(characteristic exponent),用于度量概率密度函数的拖尾厚度,取值范围为 $(0, 2]$ ,当 $\alpha=2$ 时,稳定分布退化为高斯分布;参数 $\beta$ 称为偏度指数(index of skewness),用于表示分布的偏斜程度,取值范围为 $[-1, 1]$ ,当 $\beta=0$ 时,稳定分布通常称为对称 Alpha 稳定(symmetric alpha stable, S $\alpha$ S)分布;参数 $\gamma$ 称为尺度参数(scale parameter),用来度量样本的分散程度,类比于常规分布的方差,取值范围为 $(0, +\infty)$ ;参数 $\mu$ 称为位置参数(location parameter),取值范围为 $(-\infty, +\infty)$ ,当 $0 < \alpha \leq 1$ 时, $\mu$ 表示该变量的中值,当 $1 < \alpha \leq 2$ 时, $\mu$ 表示该变量的均值。

### 3 基于 DMCE 的 DOA 估计算法

#### 3.1 MUSIC 算法

Schmidt 将子空间的概念引入到 DOA 估计领域,提出了经典的 MUSIC 算法。MUSIC 算法的基本思想是通过接收信号的协方差矩阵进行特征值分解,从而得到信号子空间和噪声子空间。以信号子空间和噪声子空间的正交性为理论基础构建信号空间谱,进而获得信号 DOA 的超分辨率估计。其主要流程如下。

假设信源之间相互独立,信源与噪声相互独立,阵元接收数据均值为零,阵元间接收噪声互不相关且方差相等。则阵元接收数据的协方差矩阵可表示为:

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] = \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{S}\mathbf{S}^H]\mathbf{A}^H + \sigma_N^2 \mathbf{I} \quad (4)$$

$\mathbf{E}[\cdot]$ 表示数学期望, $(\cdot)^H$ 表示求共轭转置, $\mathbf{I}$ 表示单位矩阵, $\sigma_N^2$ 表示噪声的方差。由于 $\mathbf{R}$ 是正定 Hermitian 矩阵,可以证明, $\mathbf{R}$ 进行特征值分解后可以得到信号子空间(记为 $\mathbf{U}_s$ )和噪声子空间(记为 $\mathbf{U}_n$ )。MUSIC 算法利用噪声子空间 $\mathbf{U}_n$ 和阵列导向矢量正交的性质,构建如下式(5)的空间谱。通过谱峰搜索可以获得入射信源的 DOA 估计:

$$P_{\text{MUSIC}} = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{a}(\theta)}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

### 3.2 本文算法

#### 3.2.1 中值离差相关熵

当加性噪声 $n_m(t)$ 服从 Alpha 稳定分布时,阵元接收数据 $x_m(t)$ 的二阶统计量不存在。因而基于协方差矩阵的常规 MUSIC 算法在该环境下将完全失效。相关熵可以有效抑制带噪信号中的异常值,且不依赖于噪声先验知识,因此在非高斯信号处理领域中得到了广泛的应用。

随机变量 $X$ 和 $Y$ 的相关熵定义如下:

$$V_\sigma(X, Y) = \mathbf{E}[\kappa_\sigma(X-Y)] \quad (6)$$

式中, $\kappa_\sigma(\cdot)$ 表示核函数, $\sigma$ 表示核长。假设随机变量 $X$ 和 $Y$ 的一组观测值为 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ ,则它们的相关熵估计式如下:

$$\hat{V}_\sigma(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \kappa_\sigma(x_i - y_i) \quad (7)$$

为了有效地抑制阵列接收数据中包含的脉冲噪声,受到相关熵理论的启发,本文提出了一种改进的相关熵算子——中值离差相关熵(DMCE)。随机变量 $X$ 和 $Y$ 的 DMCE 定义如下:

$$R_{\text{DMCE}} = \mathbf{E} \left[ \exp \left( -\frac{\|X - \operatorname{med}(X)\| + \|Y - \operatorname{med}(Y)\|}{2\sigma^2} \right) XY \right] \quad (8)$$

式中, $\operatorname{med}(\cdot)$ 表示求中值运算, $\|\cdot\|$ 表示求绝对值运算。

核函数可以把原象空间的非线性问题经过非线性变换转化为再生核 Hilbert 空间中的线性问题,通过简单的数学表达式快速计算映射到高维特征空间的内积。本文选择指数核函数 $\kappa_\sigma(\cdot) = \exp(-\|\cdot\|/2\sigma^2)$ 来构造 DMCE。指数函数满足 Mercer 定理,可以作为核函数。通过参数设置,指数核函数可以达到与高斯核函数相近的性能,同时计算复杂度更小。利用指数函数的衰减特性,DMCE 能够对阵列接收信号中的野点进行抑制,从而能够更好地适应脉冲噪声环境。同时 DMCE 中采用中值代替均值表征全体数据的一般水平。这是因为在稳定分布噪声环境下尤其当特征指数较小时,可能会出现非常大的异常值,这时估计出的均值往往会产生较大偏差。而中值具有不受偏大或偏小数据影响的优点,故而能够更好地适应于脉冲噪声环境。

核函数中核长的设置与其应用领域密切相关。在 DOA 估计问题中,核长设置的通常做法是采用启发式的经验准则或通过性能仿真选取近似最优值。最常见的启发式准则是核密度估计中的 Silverman

经验准则<sup>[12]</sup>, 然而该准则是基于二阶统计量的, 不适用于 Alpha 稳定分布下的 DOA 估计问题。而对于性能仿真选择核长的方法, Peng 等人<sup>[18]</sup> 总结了一些选取技巧。本文通过性能仿真来选择近似最优核长, 在后续的实验中有对核长选择的讨论。

### 3.2.2 DMCE 的有界性

为了保证 DMCE 能够有效应用于脉冲噪声下的 DOA 估计问题, 下面给出其有界性的证明。

**定理 1** 假设两个独立同分布的随机变量  $X$  和  $Y$  服从  $S_{\alpha}S$  分布, 则其中值离差相关熵  $R_{DMCE}$  是有界的。

**证明** 假设  $|X| \geq |Y|$ , 则 DMCE 的定义式 (8) 可进一步写为

$$|R_{DMCE}| \leq E \left[ \exp \left( - \frac{\|X| - \text{med}(X)| + \|Y| - \text{med}(Y)|}{2\sigma^2} \right) |X|^2 \right] \leq E \left[ \exp \left( - \frac{\|X| - \text{med}(X)|}{2\sigma^2} \right) |X|^2 \right] \quad (9)$$

由于  $S_{\alpha}S$  分布的偏度指数  $\beta=0$ , 因此其特征函数为  $\varphi(t) = \exp\{j\mu t - \gamma|t|^\alpha\}$ ,  $X$  的中值  $\text{med}(X) = m_X$ , 带入式(9)得到

$$|R_{DMCE}| \leq E \left[ \exp \left( - \frac{\|X| - m_X|}{2\sigma^2} \right) |X|^2 \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\|X| - m_X|}{2\sigma^2}} |X|^2 e^{j\mu t - \gamma|t|^\alpha} e^{-j\mu X} dX dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\|X| - m_X|}{2\sigma^2}} X^2 e^{-\gamma|t|^\alpha} dt dX = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\|X| - m_X|}{2\sigma^2}} X^2 dX \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|t|^\alpha} dt \quad (10)$$

其中,  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|t|^\alpha} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t^\alpha} dt = \frac{2}{\alpha} \gamma^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = h$ ,

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  表示 Gamma 函数, 式(10) 可化简为

$$|R_{DMCE}| \leq \frac{h}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\|X| - m_X|}{2\sigma^2}} X^2 dX \quad (11)$$

当  $m_X \leq 0$  时, 式(11) 可化简为

$$|R_{DMCE}| \leq \frac{h}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{X - m_X}{2\sigma^2}} X^2 dX = \frac{h}{\pi} e^{\frac{m_X}{2\sigma^2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{X}{2\sigma^2}} X^2 dX =$$

$$\frac{16h\sigma^6}{\pi} e^{\frac{m_X}{2\sigma^2}} < +\infty \quad (12)$$

当  $m_X > 0$  时, 式(11) 可化简为

$$|R_{DMCE}| \leq \frac{h}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{|X - m_X|}{2\sigma^2}} X^2 dX = \frac{h}{\pi} e^{-\frac{m_X}{2\sigma^2}} \int_0^{\frac{m_X}{2\sigma^2}} e^{\frac{X}{2\sigma^2}} X^2 dX + \frac{h}{\pi} e^{\frac{m_X}{2\sigma^2}} \int_{\frac{m_X}{2\sigma^2}}^{+\infty} e^{-\frac{X}{2\sigma^2}} X^2 dX < \frac{h}{\pi} e^{-\frac{m_X}{2\sigma^2}} \int_0^{\frac{m_X}{2\sigma^2}} e^{\frac{X}{2\sigma^2}} X^2 dX + \frac{16h\sigma^6}{\pi} e^{\frac{m_X}{2\sigma^2}} < +\infty \quad (13)$$

结合式(12)和(13)可知  $R_{DMCE}$  是有界的。

证毕

上述 DMCE 有界性的证明为其应用于脉冲噪声下的 DOA 估计问题奠定了理论基础。

### 3.2.3 基于 DMCE 的 MUSIC 算法

在稳定分布噪声环境中, 由于二阶统计量不存在, 故基于协方差矩阵特征值分解的常规 MUSIC 算法性能会严重退化, 无法适用于该场景下的 DOA 估计问题。

本文利用 DMCE 构造如下的  $M \times M$  维伪协方差矩阵  $Q$ :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & \cdots & Q_{1,M} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & \cdots & Q_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{M,1} & Q_{M,2} & \cdots & Q_{M,M} \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中,

$$Q_{i,j} = R_{DMCE}(x_i, x_j^*) = E \left[ \exp \left( - \frac{\|x_i| - \text{med}(x_i)| + \|x_j^*| - \text{med}(x_j^*)|}{2\sigma^2} \right) x_i x_j^* \right]$$

( $\cdot$ )<sup>\*</sup> 表示共轭运算。

由定理 1 易知  $Q_{i,j}$  是有界的, 因此本文采用伪协方差矩阵  $Q$  替换常规 MUSIC 算法中的协方差矩阵, 可以解决稳定分布噪声环境中协方差矩阵无界的问题。同时结合 MUSIC 算法子空间分解的思想, 提出一种新的算法——DMCE-MUSIC, 可适用于稳定分布噪声环境下的 DOA 估计问题。该算法的主要步骤如下:

**步骤 1** 通过快拍数为  $N$  的数据得出协方差矩阵的估计  $\hat{Q}$ 。其中  $\hat{Q}$  的第  $(i, j)$  项表达式如下:

$$\hat{Q}_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[ \exp \left( - \frac{\|x_i(t)| - \text{med}\{x_i(t)\}| + \|x_j^*(t)| - \text{med}\{x_j^*(t)\}|}{2\sigma^2} \right) x_i(t) x_j^*(t) \right] \quad (15)$$

**步骤2** 对矩阵  $\hat{\mathbf{Q}}$  进行特征值分解,从而获得  $M \times (M-P)$  维噪声子空间矩阵  $\hat{\mathbf{U}}_n$ :

$$\hat{\mathbf{U}}_n = [\hat{\mathbf{u}}_{p+1}, \hat{\mathbf{u}}_{p+2}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_M] \quad (16)$$

其中  $\{\hat{\mathbf{u}}_{p+1}, \hat{\mathbf{u}}_{p+2}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_M\}$  是与  $M-P$  个较小特征值对应的特征向量。

**步骤3** 计算 DMCE-MUSIC 算法的空间谱:

$$P_{\text{DMCE-MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{U}}_n \hat{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{a}(\theta)}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

搜索  $P_{\text{DMCE-MUSIC}}(\theta)$  的  $P$  个峰值,从而得到  $P$  个信源 DOA 的估计值:  $\{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p\}$ 。

### 3.2.4 Alpha 稳定分布下 DOA 估计的克拉美罗界

假定各接收阵元间的复噪声在时间和空间上均相互独立,且服从相同的  $S\alpha S$  分布。则对于 DOA 参数  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p]$  的任意无偏估计,其方差的克拉美罗界 (Cramér-Rao bound, CRB) 的表达式如下<sup>[19]</sup>:

$$\text{CRB}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{I_c} \left\{ \sum_{i=1}^N \text{Re}[\mathbf{D}^H \mathbf{Z}^H (\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H) \mathbf{Z} \mathbf{D}] \right\}^{-1} \quad (18)$$

其中,  $\text{Re}(\cdot)$  表示取实部运算,  $\mathbf{I}$  表示单位矩阵,  $\mathbf{D} = \text{diag}\{s_1(t), s_2(t), \dots, s_p(t)\}$ ,  $\text{diag}(\cdot)$  表示求对角矩阵操作,  $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_1)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_2)}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{a}(\theta_p)}{\partial \theta_p} \end{bmatrix}$ , 系数  $I_c$

可由下式得出:

$$I_c = \pi \int_0^{+\infty} \frac{[f'(\rho)]^2}{f(\rho)} \rho d\rho \quad (19)$$

其中,  $f(\rho)$  表示噪声的概率密度函数,  $f'(\rho)$  表示  $f(\rho)$  的导数。

由式(18)可知,不同噪声分布下的 CRB 仅与系数  $I_c$  相关。Alpha 稳定分布仅在  $\alpha=1$  (对应于柯西分布) 和  $\alpha=2$  (对应于高斯分布) 时存在闭式的概率密度函数。当  $\alpha=1$  时,  $I_c = 3/(5\gamma^2)$ ; 当  $\alpha=2$  时,  $I_c = 1/(2\gamma)$ 。对于其他特征指数对应的系数  $I_c$  可以通过线性插值得。

## 4 仿真实验

为验证本文提出的 DMCE-MUSIC 算法的性能,本节将进行一系列仿真实验和相关分析。

考虑阵元数为 8 的均匀线阵,采用 2 个 QPSK 信

号作为入射信源,它们的 DOA 分别设置为  $\theta_1 = 10^\circ$  和  $\theta_2 = 30^\circ$ ,快拍数为 500。干扰噪声采用 Alpha 稳定分布模型。由于稳定分布噪声不存在有限二阶矩,因此采用广义信噪比 (Generalized signal-to-noise ratio, GSNR)<sup>[17]</sup> 来衡量脉冲噪声的强度,其定义式为:

$$\text{GSNR} = 10 \log_{10} \frac{P_s}{\gamma} \quad (20)$$

式中  $P_s$  表示信号功率,  $\gamma$  表示 Alpha 稳定分布的分散系数。

仿真实验中,设定不同的实验条件用以评估算法性能,每种条件均进行 1000 次独立的蒙特卡洛实验。5 种对比算法分别是常规 MUSIC<sup>[4]</sup>, FLOM-MUSIC<sup>[9]</sup>, PFLOM-MUSIC<sup>[10]</sup>, CRCO-MUSIC<sup>[14]</sup> 和 FLOCR-MUSIC (Fractional Lower-Order Correntropy MUSIC)<sup>[20]</sup>。为了定量分析各算法的性能,本文采用两个指标作为评判标准,即估计正确率和均方根误差 (Root Mean Square Error, RMSE)。

估计正确率定义式如下:

$$P_{\text{Acc}} = \frac{N_{\text{Acc}}}{N_{\text{Tol}}} \quad (21)$$

式中,  $N_{\text{Tol}}$  表示总体实验次数,  $N_{\text{Acc}}$  表示正确估计 DOA 的次数。不失一般性,一次正确的 DOA 估计需满足条件:  $|\hat{\theta}_i(k) - \theta_i| \leq 2^\circ, i=1, 2$ 。式中  $\hat{\theta}_i(k)$  表示第  $k$  次实验中第  $i$  个信源的 DOA 估计值,  $\theta_i$  表示第  $i$  个信源真实 DOA 值。此时, RMSE 定义为:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{Acc}} P} \sum_{k=1}^{N_{\text{Acc}}} \sum_{i=1}^P |\hat{\theta}_i(k) - \theta_i|^2} \quad (22)$$

### 4.1 核长对算法性能的影响

本组实验分析核长对本文算法性能的影响。

实验中共设置 6 种不同的特征指数、GSNR 的场景进行对比, DMCE-MUSIC 算法性能如图 1 所示。当核长从 0.5 增加到 1 时,各场景中 DMCE-MUSIC 算法估计正确率均大幅提升, RMSE 显著下降。当核长达到 2 左右时,算法性能接近最佳。而当核长超过 3 时,在  $\alpha=1.0$ 、GSNR=0 dB 的强脉冲噪声场景中,算法性能显著变差;其他场景中算法的 RMSE 也会变大。

由上述实验结果可以看出,核长必须选择合适值,过大或过小均会影响 DMCE-MUSIC 算法性能。这是因为核长作为一个缩放因子,决定着核函数对带噪信号的抑制强度。当核长过小时,正常信号可能会被过分抑制;而当核长过大时,脉冲噪声无法被充分抑制。当核长为  $[1.5, 2.5]$  区间时,本文算

法在各个场景下有近似最优的性能。后续实验中如无说明,核长默认为 2。

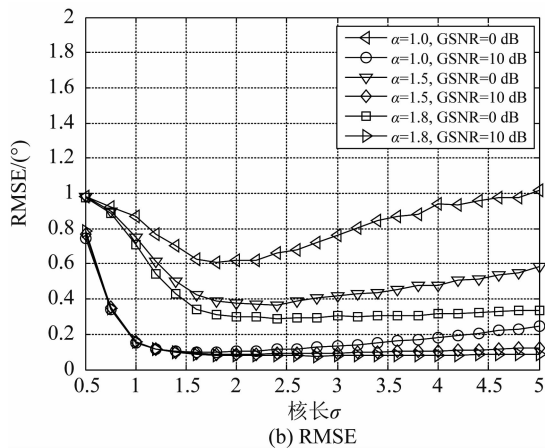
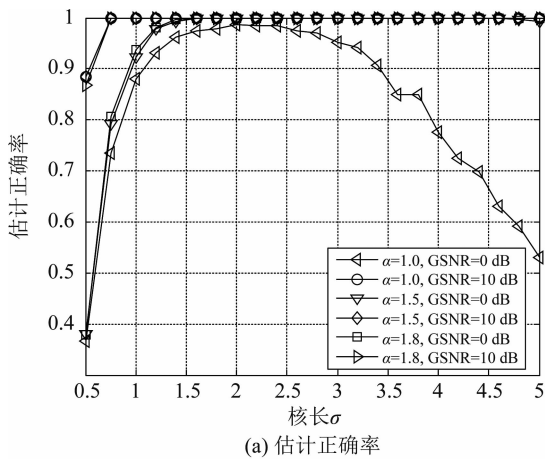


图 1 核长对算法性能的影响

Fig. 1 Performance of the proposed method versus kernel size

### 4.2 GSNR 对算法性能的影响

本组实验分析 GSNR 对算法性能的影响。

在  $\alpha=1.5$  的稳定分布噪声环境下, GSNR 对算法性能的影响如图 2 所示。从图中可以看出, 常规 MUSIC 算法由于无法处理脉冲噪声, 性能显著低于其他五种算法。FLOM-MUSIC 和 PFLOM-MUSIC 在 GSNR 较高时性能尚可, 然而随着 GSNR 降低算法性能显著下降。CRCO-MUSIC 和 FLOCR-MUSIC 算法在 GSNR 较高时性能与本文算法相当, 然而当 GSNR 小于 0dB 时, CRCO-MUSIC 和 FLOCR-MUSIC 算法性能显著下降。而本文的 DMCE-MUSIC 算法在各 GSNR 情况下, 相比于其他五种对比算法均有更好的性能。

为了进一步展现本文算法的优势, 本组实验还将仿真  $\alpha=1.0$  的强脉冲噪声环境。算法性能对比如图 3 所示。结合图 2 可以发现, 尽管 FLOM-MUSIC

SIC, PFLOM-MUSIC 在  $\alpha=1.5$  时性能较好, 然而在  $\alpha=1.0$  的强脉冲噪声环境下, 其性能随着 GSNR 减小急剧下降, 这说明了 FLOS 类算法对噪声先验知识的依赖。而在此场景下本文算法依然有较好性能, 且对比其他算法的性能优势更加明显。

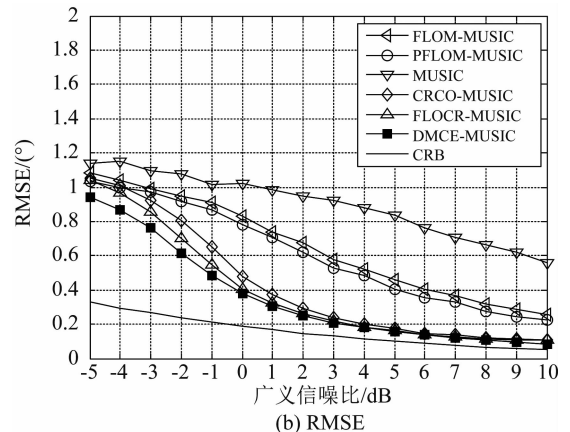
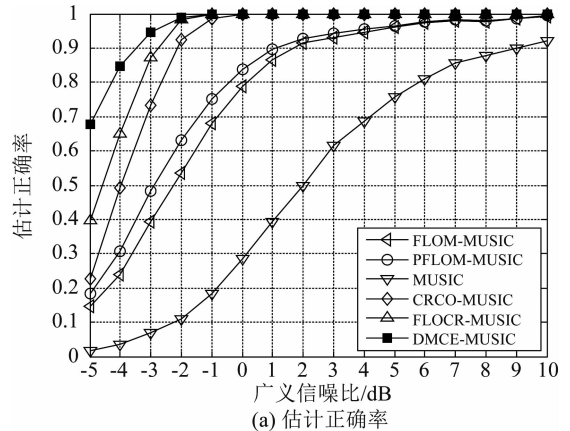


图 2 GSNR 对算法性能的影响 ( $\alpha=1.5$ )

Fig. 2 Performance of different methods versus GSNR ( $\alpha=1.5$ )

从上述实验可以看出, 常规 MUSIC 算法受脉冲噪声影响最大, 很难得到准确的 DOA 估计, 且在强脉冲噪声环境下几乎失效。FLOM-MUSIC 和 PFLOM-MUSIC 属于 FLOS 类算法, 该类算法对脉冲噪声有一定抑制效果, 但依赖于噪声先验知识, 在强脉冲噪声环境下性能也不够理想。CRCO-MUSIC、FLOCR-MUSIC 和本文的 DMCE-MUSIC 属于相关熵类算法, 得益于核函数对脉冲噪声的有效抑制效果, 相关熵类算法具有优良的性能, 同时本文的 DMCE-MUSIC 算法相比于对比算法性能更好, 且在 GSNR 和特征指数较低的强脉冲噪声环境中仍然有较好的性能。

### 4.3 特征指数对算法性能的影响

本组实验分析特征指数对算法性能的影响, 特

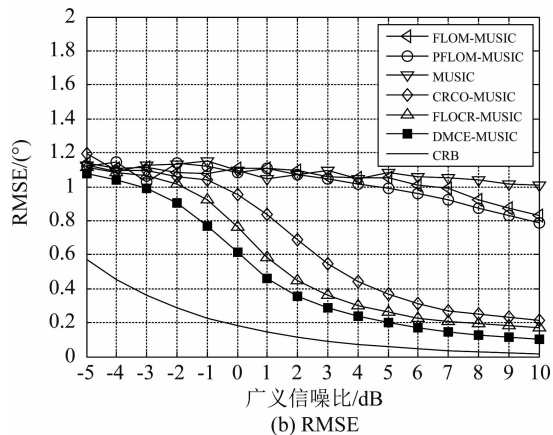
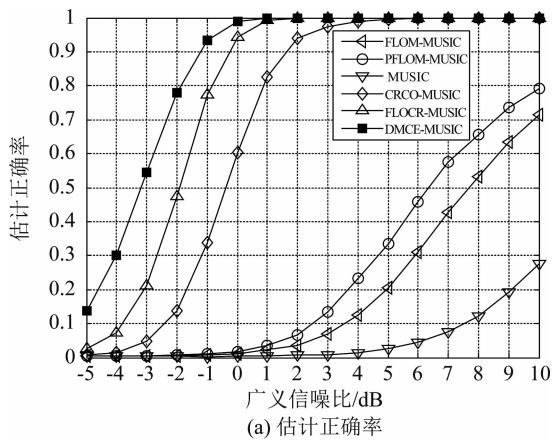


图3 GSNR 对算法性能的影响( $\alpha=1.0$ )

Fig.3 Performance of different methods versus GSNR ( $\alpha=1.0$ )

征指数越小,噪声的脉冲性越强。其中 GSNR=0 dB, 算法性能如图4所示。从图中可以看出,常规 MUSIC 在脉冲噪声环境中性能最差,且随着特征指数减小,性能衰减得最快,其对脉冲噪声的抗性最差。由于本组实验中 GSNR 较低, FLOM-MUSIC, PFLOM-MUSIC 性能衰减得也很快。上述三种算法在  $\alpha=1.0$  的强脉冲环境中几乎失效。CRCO-MUSIC 和

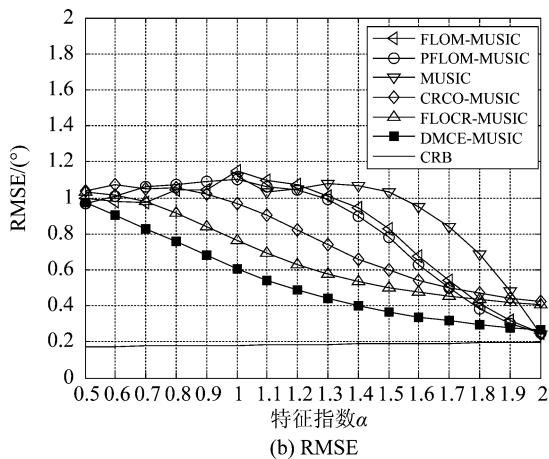
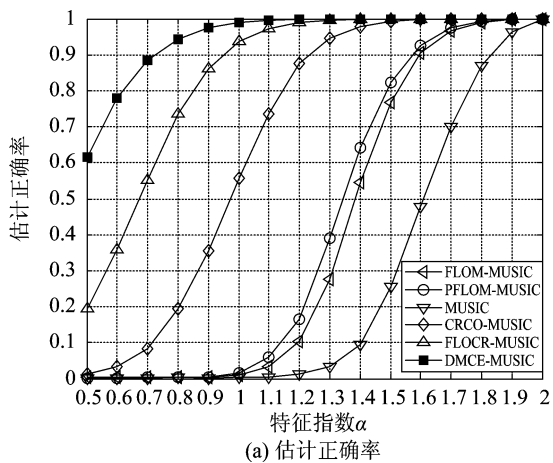


图4 特征指数  $\alpha$  对算法性能的影响

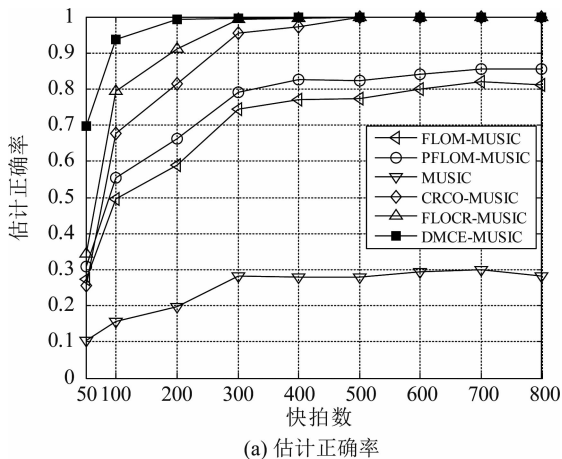
Fig.4 Performance of different methods versus characteristic exponent  $\alpha$

FLOCR-MUSIC 算法在特征指数较高时性能尚可,但在  $\alpha$  较低的强脉冲环境中性能同样会快速变差。而本文的 DMCE-MUSIC 算法性能显著优于其他五种对比算法,且在强脉冲噪声环境下仍然有较好的估计性能。

### 4.4 快拍数对算法性能的影响

本组实验分析快拍数对算法性能的影响,实验结果如图5所示,其中  $\alpha=1.5$ 、GSNR=0 dB。从图中可以看出,当快拍数低于200时,各算法性能都会变差。这是因为当快拍数较少时,基于样本平均的各估计算法很难正确分离出信号和噪声子空间,算法性能将变差。而随着快拍数的增加,各算法性能虽然都有所提升但逐渐趋于稳定。同时本文的 DMCE-MUSIC 算法在不同快拍数情况下性能均优于其他五种对比算法,更加接近 CRB,显示出了本文算法的优良性能。

由以上分析可知,快拍数对算法性能有一定影响,但只要达到一定数量后,再增加快拍数对算法性



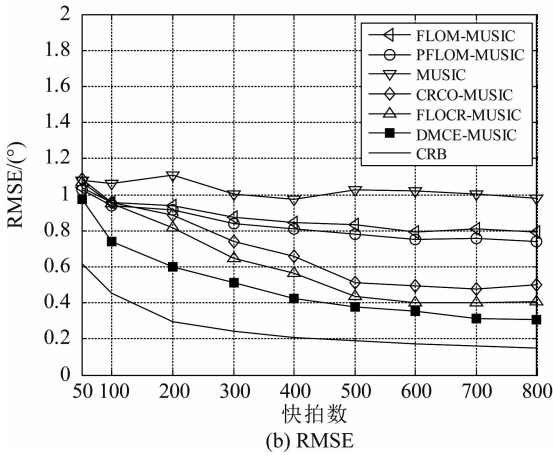


图 5 快拍数对算法性能的影响 ( $\alpha=1.5, \text{GSNR}=0 \text{ dB}$ )  
Fig. 5 Performance of different methods versus number of snapshots ( $\alpha=1.5, \text{GSNR}=0 \text{ dB}$ )

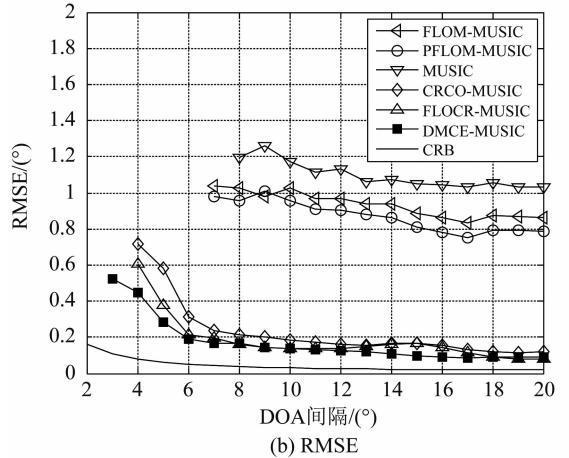
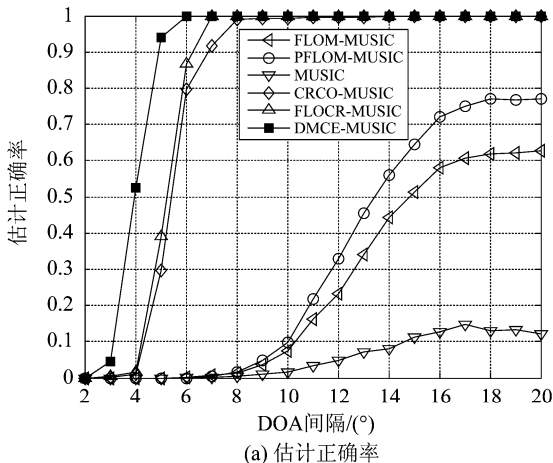


图 6 信源 DOA 间隔对算法性能的影响 ( $\alpha=1.0, \text{GSNR}=10 \text{ dB}$ )  
Fig. 6 Performance of different methods versus angular separation ( $\alpha=1.0, \text{GSNR}=10 \text{ dB}$ )

能影响不大。本文中各组实验在无说明时默认使用 500 个快拍。

#### 4.5 信源 DOA 间隔的影响

本组实验分析两个信源 DOA 间隔对算法性能的影响,如图 6 所示。其中信源 1 的 DOA 固定为  $\theta_1 = 10^\circ$ , 信源 2 的 DOA 在  $\theta_2 \in [12^\circ, 30^\circ]$  的范围内变化,  $\alpha=1.0, \text{GSNR}=10\text{dB}$ 。当 DOA 间隔小于一定值时,空间谱谱峰相互重叠,无法估计出正确的 DOA 值,算法近乎于失效,此时 RMSE 值在图中不显示。从图中可以看出,常规 MUSIC 算法的最小分辨成功角度间隔为  $8^\circ$ ; FLOM-MUSIC 和 PFLOM-MUSIC 最小分辨成功角度间隔为  $7^\circ$ ; CRCO-MUSIC 和 FLOCR-MUSIC 最小分辨成功角度间隔为  $4^\circ$ 。本文的 DMCE-MUSIC 算法效果最好,最小分辨成功角度间隔为  $3^\circ$ 。同时随着信源 DOA 间隔变小,各算法性能都有所下降,而 DMCE-MUSIC 算法性能优于其他五种对比算法,与 CRB 的差距更小,表现出了更广泛的适用性。



## 5 结论

针对脉冲噪声环境下常规 DOA 估计方法性能不佳的问题,本文首先定义了一种改进的相关熵算子——DMCE,并证明了它的有界性。在此基础上,本文提出了一种适用于脉冲噪声环境的 DOA 估计方法——DMCE-MUSIC。该方法不需要稳定分布噪声的先验知识,并且在短快拍、强脉冲噪声环境下具有鲁棒性。仿真实验分析了核长、广义信噪比、特征指数、快拍数、信源 DOA 间隔对本文方法的影响,并与多种现有方法进行对比,从多个角度验证了本文方法的优良性能。

### 参考文献

- [1] SHEN Ji, YI Jianxin, WAN Xianrong, et al. Robust DOA estimation for passive radar with target signals mixed in the reference channel[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2021, 18(3):456-460.
- [2] 王大宇, 张锦灿. 分数阶傅里叶变换在水下多目标方位估计中的应用研究[J]. 信号处理, 2020, 36(7): 1175-1183.  
WANG Dayu, ZHANG Jincan. The application of FRFT in DOA estimation of underwater multi-targets[J]. Journal of Signal Processing, 2020, 36(7): 1175-1183. (in Chinese)
- [3] 陈昭男, 王磊. 基于声传感器阵列的高亚音速飞行目标宽带 DOA 时域 MSWF 快速估计方法[J]. 信号处理, 2020, 36(12): 2116-2122.  
CHEN Zhaonan, WANG Lei. The time-domain MSWF rapid bandwidth DOA estimation of high subsonic flight



- target based on acoustic sensor arrays [J]. *Journal of Signal Processing*, 2020, 36(12): 2116-2122. (in Chinese)
- [4] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276-280.
- [5] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(7): 984-995.
- [6] SHAO M, NIKIAS C L. Signal processing with fractional lower order moments: Stable processes and their applications [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1993, 81(7): 986-1010.
- [7] 邱天爽. 相关熵与循环相关熵信号处理研究进展 [J]. *电子与信息学报*, 2020, 42(1): 105-118.  
QIU Tianshuang. Development in signal processing based on correntropy and cyclic correntropy [J]. *Journal of Electronics and Information Technology*, 2020, 42(1): 105-118. (in Chinese)
- [8] TSAKALIDES P, NIKIAS C L. The robust covariation-based MUSIC (ROC-MUSIC) algorithm for bearing estimation in impulsive noise environments [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 44(7): 1623-1633.
- [9] LIU T H, MENDEL J M. A subspace-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(8): 1605-1613.
- [10] BELKACEMI H, MARCOS S. Robust subspace-based algorithms for joint angle/Doppler estimation in non-Gaussian clutter [J]. *Signal Processing*, 2007, 87(7): 1547-1558.
- [11] SANTAMARIA I, POKHAREL P P, PRINCIPE J C. Generalized correlation function: Definition, properties, and application to blind equalization [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(6): 2187-2197.
- [12] LIU Weifeng, POKHAREL P P, PRINCIPE J C. Correntropy: properties and applications in non-Gaussian signal processing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(11): 5286-5298.
- [13] 邱天爽, 梁声扬, 田全, 等. 相关熵与循环相关熵信号处理教程 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2021.  
QIU Tianshuang, LUAN Shengyang, TIAN Quan, et al. *Signal processing of correntropy and cyclic correntropy* [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2021. (in Chinese)
- [14] ZHANG Jinfeng, QIU Tianshuang, SONG Aimin, et al. A novel correntropy based DOA estimation algorithm in impulsive noise environments [J]. *Signal Processing*, 2014, 104: 346-357.
- [15] GUAN Sheng, CHEN Jin, LI Kaikai, et al. General correntropy based DOA estimation for coherent source with impulsive noise [M] // *Lecture Notes in Electrical Engineering*. Singapore: Springer Singapore, 2019: 159-167.
- [16] CHEN Jin, GUAN Sheng. Correntropy-based DOA estimation algorithm under impulsive noise environments [J]. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2020, 2020(1): 1-20.
- [17] TSAKALIDES P, NIKIAS C L. Maximum likelihood localization of sources in noise modeled as a stable process [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(11): 2700-2713.
- [18] PENG Siyuan, CHEN Badong, SUN Lei, et al. Constrained maximum correntropy adaptive filtering [J]. *Signal Processing*, 2017, 140: 116-126.
- [19] KOZICK R J, SADLER B M. Maximum-likelihood array processing in non-Gaussian noise with Gaussian mixtures [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2000, 48(12): 3520-3535.
- [20] TIAN Quan, QIU Tianshuang, MA Jitong, et al. Robust fractional lower order correntropy algorithm for DOA estimation in impulsive noise environments [J]. *IEICE Transactions on Communications*, 2021, E104.B(1): 35-48.

### 作者简介



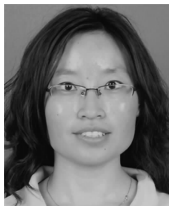
**戴江安** 男, 1991年生, 江西抚州人。大连理工大学博士研究生。主要研究方向为波达方向估计、调制识别等。  
E-mail: daijiangan@126.com



**邱天爽 (通讯作者)** 男, 1954年生, 江苏海门人。大连理工大学教授, 博士。主要研究方向为非高斯非平稳随机信号处理。  
E-mail: qitutsh@dlut.edu.cn



**田全** 男, 1980年生, 吉林公主岭人。台州学院副教授, 博士。主要研究方向为非高斯循环平稳信号处理、计算机视觉、自动驾驶等。  
E-mail: tianquan10@163.com



**蔡睿妍** 女, 1979年生, 黑龙江大庆人。台州学院副教授, 博士。主要研究方向为卫星通信、数字图像处理、阵列信号处理等。  
E-mail: ruiyancai@163.com