

基于张量补全的多维频谱地图构建

吴启晖¹ 唐梦云²

(1. 南京航空航天大学, 江苏南京 211100; 2. 解放军理工大学, 江苏南京 210007)

摘 要: 频谱地图是解决频谱短缺问题的前提和基础, 它可以从地理位置, 频率, 时间, 能量等多维度刻画频谱数据, 从而直接查看频谱信息, 例如占用频段, 空闲时段, 以及指定频段的覆盖范围等, 实现了对多维频谱数据的整合和呈现。针对实际应用中, 由于采用了压缩感知或者受传输噪声的影响, 往往采集到的都是不完整的频谱数据这一问题, 本文中我们提出了一种结合预测模型的频谱张量补全方法, 来恢复这些缺失的数据。基于通用软件无线电设备建立了实测频谱数据的收集系统提出的方法进行仿真验证。仿真结果表明, 在提出的结合预测模型的方法下, 频谱张量的补全效果有了一定的提升。

关键词: 频谱地图; 张量补全; 预测模型

中图分类号: TN92

文献标识码: A

DOI: 10.16798/j.issn.1003-0530.2017.3A.008

Multi-dimensional Spectrum Map Construction Based on Tensor Completion Scheme

WU Qi-hui¹ TANG Meng-yun²

(1. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, Jiangsu 211100, China;

2. PLA University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210007, China)

Abstract: Spectrum map, which is the key to solve the shortage of spectrum resource, can be characterized by many dimensions such as geographical location, frequency, time, and signal strength. Spectrum statement such as frequency occupancy, idle time, and signal coverage can be viewed from the spectrum map. However, in practice, due to the influence of compressed sensing or the noise from the acquisition process, the collected spectrum data is incomplete. In this paper, we propose a joint prediction model and the spectrum tensor completion method to recover the missing data. Based on the Universal Software Radio Peripheral (USR), we conduct an experiment to collect the real-world spectrum tensor data for simulation. The simulation results show that the combined method has an improved completion performance.

Key words: spectrum map; tensor completion; prediction model

1 引言

随着通信技术的迅速发展,人们不断通过创新无线接入技术,改进通信网络架构,以及开发新的频段等方式,来持续提供快速的网速带宽和多样化的业务种类^[1]。但随着人们日益增长的通信需求,可供分配的频谱资源越来越少,日益严峻的“频谱赤字”已成为阻碍无线通信发展的瓶颈。而其中一个原因就是当前固定的频谱分配模式所导致的难以高效利用频谱资源,针对该问题,认知无线电 CR

(Cognitive Radio)就提供了一种“伺机”的方式来接入空闲频谱,在提高频谱利用率的同时也降低了冲突的发生,实现了频谱资源的动态共享^[2]。

频谱数据准确及实时的获取是实现认知无线电技术^[3]的前提和基础,只有在了解频谱占用的情况下才能有效地判断当前时隙是否允许次级用户的接入,并需要规定其功率限值来保证不影响主用户的正常通信^[4]。因此,频谱数据库的建立对于认知无线电的应用有十分重要的意义,频谱数据库可以对主用户位置,发射功率,可用频谱情况进行记

录和分析。而各类频谱地图则是频谱数据库的一种可视化方式,例如电视白频谱地图^[5],就是结合了地理信息和传播模型来确定每个信道的最大传输功率。文献[6]中提出了一种基于压缩量化的感知方法,以实现功率密度频谱地图的实时绘制。此外也有很多关于频谱地图的应用的研究,例如文献[7]中就构建了实际环境下的频谱地图数据,并且预测了各种通信和网络性能。文献[8]提出了一个结合频谱地图补全的室内定位的方法,无需建立完整的指纹频谱地图,就可以使用少量的传感器进行定位。然而,传统的频谱地图主要考虑的是信号强度在空间上的分布,往往较少地综合考虑到时间,频段等多个维度。

为了准确得描述频谱数据的时空频多维特性,我们将二维的频谱地图拓展到多维空间,并相应引入了张量的概念。张量是多维数组,是向量和矩阵的扩展,其严格定义是利用线性映射来描述的,在计算机视觉和图像领域有很重要的应用^[9-11]。在这篇文章中,我们通过提出“频谱张量”的概念来刻画多维频谱数据的信息。在频谱感知中,由于受限于监测频段、时间段,以及空间部署等因素,实测获得的频谱数据往往是离散而又不完整的,这就需要采用缺失值恢复的方法对多维频谱地图进行重建,一般可以采取两种方法,其一是用张量补全的算法来估计频谱数据中的缺失值,另一种就是采用预测的方法,来捕获到频谱不同维度的关联性,在具有先验信息的基础上进行有效的预测。

针对上述问题,本文提出了一种结合预测模型的张量补全方法来恢复采样数据下的缺失值,引入了频谱张量的概念来描述多维的频谱数据,并对不完整的频谱张量的补全问题进行了数学建模,对实测数据的低秩特性进行了验证。本文采用 USRP (Universal Software Radio Peripheral) 通用软件无线电外设来收集实际环境下的频谱张量数据,并对本文提出的结合方法的有效性进行了仿真验证。

2 对频谱张量的建模

对于一个 n 维的张量,我们可以定义为 $\chi \in R^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$,其中 x_{i_1, i_2, \dots, i_n} 表示张量中第 (i_1, i_2, \dots, i_n) 个值。如图 1(a) 所示,是实验中实测到的一个多维频谱数据,可以将它建模为一个三维的频谱张量,如图 1(b),其中 x, y 轴分别对应实测的二维平面空

间的 x, y 坐标, z 轴表示发射信号的功率。那么,对于这个频谱张量中的任意一个元素 $x_{x, y, p}$,其含义就是在 x 横坐标位置, y 纵坐标位置下,接收到的发射功率为 p 的信号强度。由于一个张量可以看作是许多二维矩阵的组合,因此频谱张量可以按照不同维度进行展开。对于三维张量 χ ,则可以按照下式分别进行展开。

$$\chi_{(x)} = \begin{bmatrix} x_{1,1,3}, x_{1,2,3}, x_{1,3,3}, x_{1,4,3} & x_{2,1,3}, x_{2,2,3}, x_{2,3,3}, x_{2,4,3} \\ x_{1,1,2}, x_{1,2,2}, x_{1,3,2}, x_{1,4,2} & x_{2,1,2}, x_{2,2,2}, x_{2,3,2}, x_{2,4,2} \\ x_{1,1,1}, x_{1,2,1}, x_{1,3,1}, x_{1,4,1} & x_{2,1,1}, x_{2,2,1}, x_{2,3,1}, x_{2,4,1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\chi_{(y)} = \begin{bmatrix} x_{1,1,1}, x_{2,1,1} & x_{1,2,1}, x_{2,2,1} & x_{1,3,1}, x_{2,3,1} & x_{1,4,1}, x_{2,4,1} \\ x_{1,1,2}, x_{2,1,2} & x_{1,2,2}, x_{2,2,2} & x_{1,3,2}, x_{2,3,2} & x_{1,4,2}, x_{2,4,2} \\ x_{1,1,3}, x_{2,1,3} & x_{1,2,3}, x_{2,2,3} & x_{1,3,3}, x_{2,3,3} & x_{1,4,3}, x_{2,4,3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\chi_{(p)} = \begin{bmatrix} x_{1,1,1}, x_{2,1,1} & x_{1,1,2}, x_{2,1,2} & x_{1,1,3}, x_{2,1,3} \\ x_{1,2,1}, x_{2,2,1} & x_{1,2,2}, x_{2,2,2} & x_{1,2,3}, x_{2,2,3} \\ x_{1,3,1}, x_{2,3,1} & x_{1,3,2}, x_{2,3,2} & x_{1,3,3}, x_{2,3,3} \\ x_{1,4,1}, x_{2,4,1} & x_{1,4,2}, x_{2,4,2} & x_{1,4,3}, x_{2,4,3} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中 $\chi_{(x)}, \chi_{(y)}, \chi_{(p)}$ 分别表示三维张量 χ 按空间的横坐标,纵坐标和发射功率分别展开后的矩阵结果,而每一个由张量展开后得到的矩阵本身包含了所有的元素。

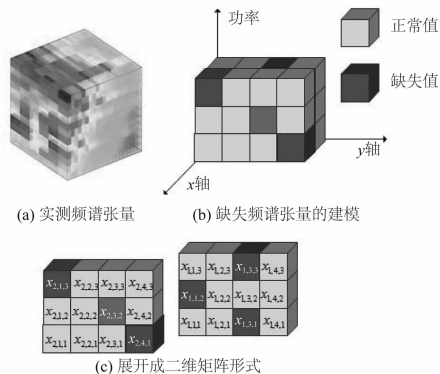


图1 对频谱张量的建模

Fig. 1 Modeling for spectrum tensor

在实际中,由于信号强度的采集过程可能存在的干扰,部分的频谱数据会丢失,或者在频谱感知中,采用压缩感知的方法同样可能会使得数据不完整^[12]。此外,多维频谱地图的绘制需要大量的采集数据,这就需要在传感网络中铺设大量的传感器,为了节省时间和能源,我们希望通过采样的方式来减小开销。那么就需要应用张量补全的算法,

从有限的采样点中恢复出原始数据。

如图 1(c) 所示,浅色的方块表示正常元素,而深色的方块则表示缺失的张量元素。给定一个子集 Ω ,在集合 Ω 中的元素对应了 χ 中的观测值,而其他值则被设为“0”,子集 Ω 可以被定义成:

$$\chi^\Omega = \begin{cases} \chi, (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \Omega \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

接下来就可以将不完整的频谱张量的补全问题建模成为一个优化问题,用能够观测到的频谱数据来恢复整个频谱张量,具体可以建模成为式(5)。

$$\begin{aligned} \min_{\chi} &: \|\chi\|_* \\ \text{s.t.} &: \chi_\Omega = \Gamma_\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

其中 χ, Γ 是在每个维度都有着相同大小的两个频谱张量。 Γ 的元素在子集 Ω 中的表示已知值,不属于该子集的元素则是缺失值。而 χ 就是需要被补全的频谱张量。由于多维张量可以看作是二维矩阵的扩展,而低秩矩阵补全问题往往需要解决用范数来描述矩阵的秩的问题,因此为了解决张量的补全问题,我们首先引入了迹范数的定义^[12]:

$$\|\chi\|_* := \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\chi_{(i)}\|_* \quad (6)$$

其中 $\alpha_i \geq 0$, 并且 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $\|\chi_{(i)}\|_*$ 表示按维度 i 展开的矩阵 $\chi_{(i)}$ 的范数($\chi_{(i)}$ 中奇异值的和)。对于张量来说,其迹范数就是所有维度展开的矩阵的迹范数的组合。那么,张量补全的优化问题就可以写成式(7)的形式。

$$\begin{aligned} \min_{\chi} &: \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\chi_{(i)}\|_* \\ \text{s.t.} &: \chi_\Omega = \Gamma_\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

3 张量补全算法

目前,用于张量数据的补全算法已经有了一定的理论基础,文献[13]提供了一种多维数据的压缩感知补全算法,文献[14]中提出了另一种完全贝叶斯分解的方法,可以处理不完整的或是包含了噪声的张量数据。在本文中,我们应用了文献[15]中提出的一个有效的算法来解决不完整张量的补全问题。该算法可以在很少的采样点或是有很大的缺失数据的情况下较好地完成数据估计。

由于多个展开矩阵的迹范数的相关性,很难对

式(7)直接进行处理。因此该算法采用了交替方向法乘法器(ADMM)将它们分解成更小的式子^[16]来求解凸优化问题。通过这种分裂的方式简化原问题,使得每个迹范数都能够单独计算。为了方便计算,我们引入了 M_1, \dots, M_n 矩阵,以推导出以下的等效公式:

$$\begin{aligned} \min_{\chi, M_i} &: \sum_{i=1}^n \alpha_i \|M_i\|_* \\ \text{s.t.} &: \chi_{(i)} = M_i \text{ for } i = 1, \dots, n \\ &: \chi_\Omega = \Gamma_\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

其对应的增广拉格朗日函数可以定义成:

$$\begin{aligned} L_\rho(\chi, M_1, \dots, M_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \|M_{i(i)}\|_* + \langle \chi - M_i, \gamma_i \rangle + \frac{\rho}{2} \|M_i - \chi\|_F^2 \end{aligned} \quad (9)$$

根据 ADMM 架构,我们可以应用增广拉格朗日函数对 M_i, χ , 和 γ_i 迭代更新。

$$\begin{aligned} \{M_1^{k+1}, \dots, M_n^{k+1}\} = \\ \arg \min_{M_1, \dots, M_n} : L_\rho(\chi^k, M_1, \dots, M_n, \gamma_1^{k+1}, \dots, \gamma_n^{k+1}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\chi^{k+1} = \arg \min_{\chi \in \Omega} : L_\rho(\chi, M_1^{k+1}, \dots, M_n^{k+1}, \gamma_1^k, \dots, \gamma_n^{k+1}) \quad (11)$$

文献[12]中总结了上述的张量补全算法,它可以自适应地改变迭代速度。虽然这种算法的速度不是最快的,但是由于应用了 ADMM,其收敛性很好。因此我们应用这种张量补全算法解决上述问题缺少谱张量。

4 结合预测模型的频谱张量补全方法

预测是数据挖掘的一种,是指通过对样本数据(历史数据)的输入值和输出值关联性的学习,得到预测模型,再利用该模型对未来的输入值进行输出值预测,一般地,可以通过机器学习方法建立预测模型。由于接收到的信号强度是根据辐射源发射功率的变化而变化的,因此我们可以假定在很短的时间内,频谱地图的演化过程可以近似看作是一个线性动态系统,本文中我们采用了最为常见的线性模型。

本文提出的结合预测模型的频谱张量补全方法的核心思想就是建立不完整的频谱地图之间的相关性模型,并与张量补全算法的结果进行结合,

最终得到一个加权优化的结果。首先需要训练出一个线性预测模型,如式(12),来对不完整的频谱地图进行估计,由于频谱张量可以分解成许多频谱地图,可以先保一张完整的频谱地图作为先验信息,然后将不完整的频谱张量分为两组类别。一组是用来建立预测模型的训练数据,而另一组则是作为输入数据。在训练步骤中,通过对比训练数据集里的保留数据与先验频谱地图,采用线性拟合的数学工具来获得预测模型。

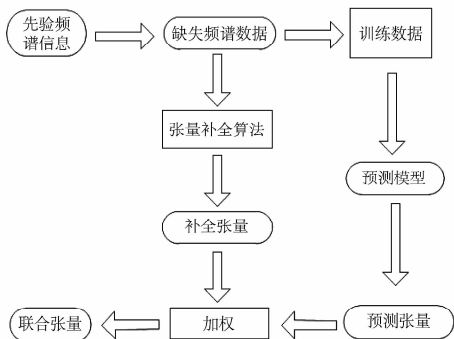


图2 结合预测模型的频谱张量补全方法

Fig.2 The flow chart of the joint tensor completion and prediction scheme

$$\eta_{\Omega}(s+1) = A\eta_{\Omega}(s) + B \quad (12)$$

其中 η 是预测频谱张量,不包括在子集 Ω 中的缺失元素将会通过该预测模型恢复出来。 s 表示当前状态的频谱地图, A, B 是模型中的向量参数。接着在预测步骤中,基于输入的不完整的频谱数据对频谱张量进行估计。在得出张量补全算法的结果后,我们可以通过分配权重 kg 来得到最终结合方法下的频谱张量数据。

$$\chi(s+1) = \chi(s) + kg(\eta(s) - \chi(s)) \quad (13)$$

$$kg = \frac{\Delta(\eta)}{\Delta(\eta) + \Delta(\chi)} \quad (14)$$

其中, $\chi(s+1)$ 表示下一状态的频谱张量。从图2中可以观察到,张量补全方案和预测模型方案会分别产生一个完整的频谱张量。 Δ 表示指补全结果与预测结果的误差,可以通过与实测频谱张量的比较,分别计算出两者的误差值。权重的确定表示了最终的综合结果是更相信数据补全的结果,还是预测模型。例如,当采样率很低,张量中完整的元素很少时,张量补全方案很难起到很好的作用,而预测模型的训练学习可能会得到一个更为准确的结果,此时可以设置较小的权重。相反,当权重设置较大

时,就意味着最终状态估计更相信张量补全方案的结果。

5 性能验证

在本节中,我们设计了一个实验来监测并收集实际环境下的信号强度,并验证了结合预测模型的频谱张量补全的有效性。

5.1 实验设计和操作

在本次实验中,我们采用了五个基于 LabVIEW 平台的 USRP(通用软件无线电外设)作为信号强度的采集设备,由一个 USRP 作为信号发射器,另外四个作为接收设备。为了提高实验的准确性,我们首先进行了扫频,来找到一段相对空白的频段 580 MHz ~ 630 MHz,并将 600 MHz 作为中心频率,发送正弦波信号。

为了绘制多维的频谱张量数据,我们将实验室分为 6×12 个网格来分别收集每个网格内的频谱数据。通过改变发射增益的参数来改变发射功率,实验环境下 USRP 所能接收到的信号强度范围分布在 -80 dB 到 -30 dB。

5.2 对频谱数据秩的分析

为了描述频谱张量的秩的特性,我们首先将对张量数据进行预处理,按每个维度进行展开将张量分解到矩阵的形式,并利用奇异值分解(SVD)^[17]来分析所有展开的频谱矩阵的秩的分布情况。

图3中显示的是按降序排列的归一化后的奇异值,四条线分别表示高斯随机信号,按位置(x 轴, y 轴)以及发射功率维度分别展开的矩阵。与相同大小的独立同分布的高斯随机信号数据集对比之下,可以看出与高斯随机信号的分布情况完全不同,频谱张量展开后的信号强度矩阵的分布总是集中在前几个奇异值内,这表明了实际测量的频谱张量数据具有低秩结构。

5.3 仿真结果

接着我们用实测的频谱张量数据对本文提出的结合预测模型的张量补全方法进行仿真验证。完整的频谱张量数据的大小为 $6 \times 12 \times 21$,我们对其进行随机采样,用 sr 表示采样率,即已知数据占总的频谱张量数据的百分比。

图4给出了 HaLRTC 算法完成频谱张量补全的过程,在这个仿真中,图4(a)所示的是实际环境中监测到的频谱张量数据,三个维度分别表示了位置

(x 轴和 y 轴) 两个维度以及信号功率维度, 接收到的信号强度用不同的颜色显示。然后, 我们对其随机采样, 假设只有 50% 的数据保留, 其余数据置零, 采样后的频谱张量如图 4(b) 所示。张量补全算法的补全结果显示在图 4(c)。根据(a)(c)两张图的对比, 验证了张量恢复数据估计的准确性。

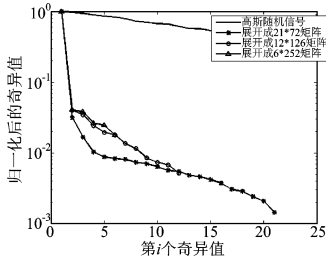


图 3 展开的频谱矩阵的特征值分布

Fig.3 Normalized singular values of unfolded spectrum tensor datasets

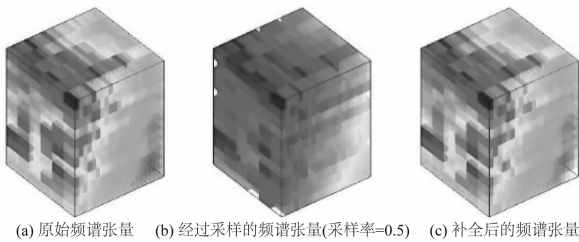


图 4 实测的频谱张量数据的补全过程

Fig.4 Visualization for the completion process of the real-world measurements

为了进一步比较张量补全算法的恢复性能, 我们定义了均方根误差 (RSE) dB。

$$RSE [dB] = 10 \log_{10} \frac{\|\tilde{\chi} - \chi\|_2}{\|\chi\|_2} \quad (15)$$

式中 $\tilde{\chi}$ 是补全后的张量, 而 χ 是实测的原始频谱张量。图 5 比较了矩阵补全和张量补全的均方根误差, 本文中我们选择的是文献[18]提出的一个快速有效的矩阵补全算法 FPCA, 该算法可以解决大型矩阵的秩最小化问题。图中三条虚线分别表示了按三个维度展开的二维矩阵的补全情况, 而实线表示的是张量补全算法的性能。从图中可以看出, 当采样率小于 0.3 或者大于 0.7 的时候, 对张量补全算法有着比二维矩阵补全算法更好的性能, 而当采样率在 0.3 和 0.7 之间时, 对张量补全算法的均方根误差并不总是优于矩阵的情况, 这是因为张量补全的准则是将张量展开成矩阵的方式, 以计算它们加权迹范数来定义优化问题, 因此

不能保证在张量补全问题比每个维度的矩阵补全方式性能都更好, 但是采取了一种折衷的方式, 保证了其稳健的性能。

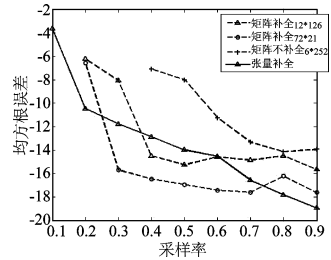


图 5 张量补全与矩阵补全的性能对比

Fig.5 RSE performance of the tensor completion and the unfolded matrix completion

并且在图 5 中, 由于过低的采样率导致 FPGA 不能正常恢复缺失值, 这是根据文献[18], 当采样率过低时, 将会有符合条件的秩为 r 的无限个矩阵, 那么在这种情况下, 矩阵就不能被正常恢复了。

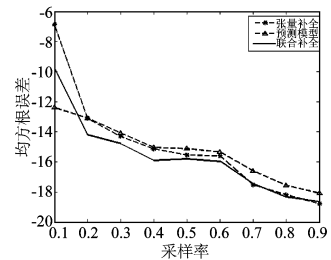


图 6 结合预测模型的张量补全方法的性能对比

Fig.6 RSE performance of the combined prediction tensor completion method

图 6 显示了结合预测模型的张量补全方法的性能。两条虚线分别表示仅采用张量补全算法或预测模型方法的均方根误差。很明显, 当 sr 较小时, 预测模型得到的结果更加准确, 因为此时有效的观测值很少, 而预测模型相对稳定。而当 sr 较大时, 张量补全方案则比预测模型具有较好的预测性能。实线表示的是本文提出的方法的误差, 它结合了低采样率下预测模型的可靠性, 以及高采样率下张量补全算法的高精度, 有着更好的张量恢复性能。

6 结论

本文提出了频谱张量的概念来描述多维的频谱数据, 并且提出了一种结合预测模型的张量补全方法来恢复不完整的频谱信息, 通过建立不完整的频谱地图之间的相关性模型, 与张量补全算法的结果进行结合, 从而得到一种加权优化的结果。文中

对实际环境的频谱数据进行了监测和收集,仿真结果显示了结合预测模型下的张量补全算法的优越性。下一步将会考虑采集数据中的异常值,来提高频谱补全的可靠性。

参考文献

- [1] Li Q, Niu H, Papathanassiou A, et al. 5G network capacity: Key elements and technologies[J]. IEEE Vehicular Technology Magazine, 2014, 9(1): 3129-3143.
- [2] Mitola J, Maguire G. Cognitive radio; Making software radios more personal[J]. IEEE Personal Communications, 1999, 6(4): 13-18.
- [3] Ding G, Wu Q, Yao Y, et al. Kernel-based learning for statistical signal processing in cognitive radio networks: Theoretical foundations, example applications, and future directions[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2013, 30(4): 126-136.
- [4] Ding G, Wang J, Wu Q, et al. Cellular base-station assisted device-to-device communications in TV white space[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2016, 34(1): 107-121.
- [5] Murty R, Chandra R, Moscibroda T. et al. Senseless: A database driven white spaces network[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2012, 11(2): 189-203.
- [6] Romero D, Kim S, Giannakis G. Online spectrum cartography via quantized measurements [C] // America: 50th Annual Conference on Information Sciences and Systems. 2015: 1-4.
- [7] Debroy S, Bhattacharjee S, Chatterjee M. Spectrum map and its application in resource management in cognitive radio networks[J]. IEEE Transactions on Cognitive Communications and Networking, 2016, 1(4): 406-419.
- [8] Sorour S, Lostanlen Y, Valaee S, et al. Joint indoor localization and radio map construction with limited deployment load[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2015, 14(5): 1031-1043.
- [9] Basser P, Mattiello J, LeBihan D. MR diffusion tensor spectroscopy and imaging[J]. Biophysical Journal, 1994, 66(1): 259.
- [10] Le Bihan D, Mangin J, Poupon C, et al. Diffusion tensor imaging: Concepts and applications[J]. Journal of Magnetic Resonance Imaging, 2001, 13(4): 534-546.
- [11] Evrim A, Dunlavy D, Kolda T, et al. Scalable tensor factorizations for incomplete data[J]. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 2011, 106(1): 41-56.
- [12] Tsagkatakis G, Beferull-Lozano B, Tsakalides P. Singular spectrum-based matrix completion for time series recovery and prediction[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2016, 2016(1): 1.
- [13] Caiafa C, Cichocki A. Stable, robust, and super fast reconstruction of tensors using multi-way projections [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(3): 780-793.
- [14] Zhao Q, Zhang L, Cichocki A. Bayesian CP factorization of incomplete tensors with automatic rank determination [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2015, 37(9): 1751-1763.
- [15] Liu J, Musialski P, Wonka P, et al. Tensor completion for estimating missing values in visual data[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1): 208-220.
- [16] Fazel M, Hindi H, Boyd S. A rank minimization heuristic with application to minimum order system approximation [C] // America: In American Control Conference, Proceedings of the 2001, 6: 4734-4739.
- [17] Aharon M, Elad M, Bruckstein A. SVD: An Algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311-4322.
- [18] Ma S, Goldfarb D, Chen L. Fixed point and bregman iterative methods for matrix rank minimization[J]. Mathematical Programming, 2001, 128(1-2): 321-353.

作者简介



吴启晖 男,1970年生,安徽歙县人。主攻认知无线电与智能频谱管控,发表SCI论文93篇,IEEE期刊论文50篇,ESI高被引论文6篇,认知无线电领域大陆学者第1位,国际学术奖3项;主持国家级重点项目5项,获国家科技进步二等奖1项,省部级一等奖2项,二等奖2项;授权发明专利2项,国家发明专利20项;省部级教学二等奖1项;IET Fellow,江苏省有突出贡献中青年专家,江苏省333工程中青年科技领军人才。



唐梦云 女,1992年生,江苏丹阳人。解放军理工大学硕士研究生,主要研究方向是认知无线电、数据补全、频谱地图。

E-mail: tangmy223@foxmail.com