

# 基于最大特征值的拟合优度检验频谱感知算法

贺亚晨 赵文静 刘 畅 金明录

(大连理工大学信息与通信工程学院, 辽宁大连 116024)

**摘 要:** 如今频谱资源稀缺问题已成为热点问题之一, 认知无线电技术是解决该问题的一种重要手段。基于拟合优度(GoF)检验的频谱感知算法是一种优秀的感知算法, 它不需要知道任何主用户的信息, 而且能够在较少的采样点条件下达到较优的检测性能。已有的基于拟合优度检验的频谱感知算法虽然能够在静态信号下表现出优异的性能, 但是在检测动态信号时性能急剧下降。针对这个问题, 本文提出了一种基于最大特征值的拟合优度检测算法利用随机矩阵理论分析了信号协方差矩阵的最大特征值分布, 通过 GoF 检验来感知主用户的存在性, 在检测动态信号时仍能保持优异的检测性能。此外, 在所提算法中, 设计了一种低复杂度的拟合准则, 它能够降低 GoF 算法拟合统计量的计算复杂度, 并提高算法检测性能。仿真结果表明了所提检测算法和拟合准则的有效性。

**关键词:** 频谱感知; 拟合优度检验; 随机矩阵理论; 最大特征值

**中图分类号:** TN914      **文献标识码:** A      **DOI:** 10.16798/j.issn.1003-0530.2017.3A.006

## A Novel Spectrum Sensing Method Using Goodness of Fit Test based on Maximum Eigenvalue

HE Ya-chen ZHAO Wen-jing LIU Chang JIN Ming-lu

(School of Information and Communication Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

**Abstract:** The problem of scarcity of spectrum resources is becoming one of the hot issues. To overcome the problem of spectrum crisis, cognitive radio was proposed as an important technology. Spectrum sensing algorithm based on goodness of fit (GoF) test is an excellent perceptual algorithm, which can achieve good detection performance under small number of samples without any information of the primary users (PUs). The existing spectrum sensing algorithms based on GoF test indeed present excellent performance under static signals, but it degrades sharply when detecting dynamic signal. Aiming at this problem, this paper presents a GoF detection algorithm based on maximum eigenvalue. The new algorithm utilizes random matrix theory to analyze distribution of the maximum eigenvalue of sample covariance matrix and detects the existence of main users by GoF test, which can still present good detection performance under dynamic signals. In addition, a low-complexity fitting criterion is designed for the proposed detection method, which is able to improve the detection performance with a low computational complexity of fitting statistics of GoF algorithms. Simulation results show the efficiency of the proposed fitting criterion and detection algorithm.

**Key words:** spectrum sensing; goodness of fit test; random matrix theory; maximum eigenvalue

## 1 引言

无线服务不断增长的今天, 如何有效地应对频谱资源短缺的问题已成为热点之一。为了有效的改善频谱资源利用率, 认知无线电(Cognitive Radio, CR)技术应运而生, 提出了一种解决方法: 在一个已经给定的信道中, 次级用户(Second User, SU)感知主用户

(Primary User, PU) 占用信道的情况, 在不干扰主用户正常使用的前提下完成使用信道的工作, 从而提高频谱资源的利用率。其中检验主用户存在性的过程被称为频谱感知过程。频谱感知技术发展迅速, 大量的算法已经被提出。当主用户发送的信号信息已知的情况下, 匹配滤波(matched filtering)算法已经被证

明是检验主用户存在性的最优的检测算法<sup>[1]</sup>。而当主用户发射的信号信息未知的情况下,如果已知噪声方差,那么能量检测(energy detection-based, ED)算法在检测独立同分布(independent and identically distributed, i. i. d)信号的性能是最优的<sup>[2-4]</sup>。但是,在实际情况下噪声方差一般无法知道,并且它还会受噪声不确定度的影响,而能量检测算法对噪声是敏感的,这些原因会显著影响算法性能。而在检测相关信号时,能量检验没有利用信号之间的相关性,检测性能不是最优的。为了改善这种情况,一系列的算法相继被提出,包括最大最小特征值之比(Maximum-Minimum Eigenvalue, MME)算法<sup>[5]</sup>和最大特征值(Maximum Eigenvalue Detection, MED)算法<sup>[6]</sup>等。

拟合优度检验(Goodness of Fit Testing, GoF)算法是一种非参数假设检验算法,不需要给出发送信号的任何先验信息。当发送信号不存在的时候,接收端将接收到独立分布的噪声样本,一般地,假设噪声是服从均值为0、方差为 $\sigma^2$ 的高斯白噪声。因此GoF检测算法将频谱感知问题转变为检验采样得到的样本数据是否是服从均值为0、方差为 $\sigma^2$ 的正态分布问题。由此可以看出GoF算法在检验过程中不需要知道发送信号的任何参数。大量优秀的GoF算法已经被提出,包括Anderson-Darling(AD)检验算法<sup>[7]</sup>、Kolmogorov-Smirnov(KS)算法<sup>[8]</sup>等。近几年也相继提出了基于单边检测的GoF算法<sup>[9]</sup>和基于似然比检验的GoF算法<sup>[10]</sup>等。但是这些算法都是基于正态分布的拟合优度检验,从而在检测动态信号时,性能会急剧下降。

本文提出了一种新的基于最大特征值的拟合优度检验算法。将接收信号的最大特征值作为拟合对象,充分利用信号的特征信息,从而提高算法的检测性能。此外,本文还提出了一种新的拟合准则,在降低拟合统计量计算复杂度的同时,提高了GoF算法的检测性能。

## 2 信号模型与GoF算法简介

假设频谱感知得到的 $N_s$ 个观测值为 $\{Y_i\}_{i=1}^{N_s}$ 。当主用户不发送信号时, $Y_1, \dots, Y_{N_s}$ 是服从均值为0、方差为 $\sigma^2$ 的高斯白噪声信号。而当主用户发送信号时, $Y_1, \dots, Y_{N_s}$ 同时包含了发送信号信息和噪声信息。因此,检验主用户的存在就等价于检验二元假设

$$\begin{aligned} H_0: Y_n &= \eta_n, \\ H_1: Y_n &= s_n + \eta_n \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $Y_n$ 则是 $n$ 时刻接收端的接收信号。接收信号可以是动态信号或者静态信号。采样得到的缓慢变化的信号,将其称之为静态信号,为不失一般性,假设 $s$ 是直流信号;采样得到的随时间动态变化的信号,将其称之为动态信号,为不失一般性,假设 $s$ 是载波信号或者零均值的高斯信号<sup>[14]</sup>。而 $\eta_n$ 是 $n$ 时刻的加性高斯白噪声,均值为0,方差为 $\sigma_n^2$ 。 $s_n$ 是 $n$ 时刻包含了信道信息的主用户发送信号。把独立同分布的噪声 $\eta_n$ 的累积分布函数(CDF)记为 $F_0(y)$ 。因此,检验发送信号的存在等价于检验零假设(null hypothesis) $H_0$ —— $Y$ 是一个服从 $F_0(y)$ 分布的i. i. d序列。由此可知,拟合优度检验不需要知道发送信号的任何先验信息。

假设 $F_Y(y)$ 表示观测值 $Y_1, \dots, Y_n$ 的累积分布函数。于是,定义 $F_Y(y)$ 为

$$F_Y(y) = \left| \{i: Y_i \leq y, 1 \leq i \leq n\} \right| / n \quad (2)$$

其中对任意的有限集合 $S$ , $|S|$ 表示集合 $S$ 的基数。在零假设的前提下,随着拟合对象数 $n$ 的增大,接收信号 $F_Y(y)$ 会逐渐收敛于噪声分布 $F_0(y)$ ,即当 $n$ 足够大时,在零假设成立的情况下, $F_Y(y)$ 会非常接近 $F_0(y)$ ,如果 $F_Y(y)$ 显著偏离 $F_0(y)$ ,那么就可以认为零假设 $H_0$ 不成立,即存在主用户信号。

随着数学统计理论的发展,拟合优度检验算法中许多度量两种分布 $F_0(y)$ 和 $F_Y(y)$ 之间距离的优秀方法已被提出,这些方法称之为拟合准则。文献[11]给出了常用的GoF检测的拟合准则,包括KS准则,CM准则和AD准则等。在本文中的二元假设检验为

$$\begin{aligned} H_0: F_Y(y) &= F_0(y) \\ H_1: F_Y(y) &\neq F_0(y) \end{aligned} \quad (3)$$

计算得到 $F_Y(y)$ 与 $F_0(y)$ 的拟合统计量 $T$ ,通过与判决门限 $t_0$ 进行比较,当 $T < t_0$ 时,就接受 $H_0$ 假设,认为不存在发送信号,否则拒绝 $H_0$ (即接受 $H_1$ ),认为存在发送信号。

## 3 基于最大特征值检测的GoF算法

### 3.1 最大特征值检测算法简介

我们考虑连续的 $L$ 个样本,定义下面的向量:

$$\mathbf{Y}(n) = [Y(n), Y(n-1), \dots, Y(n-L+1)]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{s}(n) = [s(n), s(n-1), \dots, s(n-L+1)]^T \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\eta}(n) = [\eta(n), \eta(n-1), \dots, \eta(n-L+1)]^T \quad (6)$$

其中  $L$  被称为平滑因子。接收信号和发送信号的协方差矩阵定义为:

$$\mathbf{R}_Y = E(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T) \quad (7)$$

$$\mathbf{R}_s = E(\mathbf{s}\mathbf{s}^T) \quad (8)$$

所以我们可以得到

$$\mathbf{R}_Y = \mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_L \quad (9)$$

当信号  $s(n)$  不存在时,  $\mathbf{R}_s = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{R}_Y = \sigma^2 \mathbf{I}_L$ 。当信号  $s(n)$  存在时,  $\mathbf{R}_s \neq \mathbf{0}$ 。令  $\mathbf{R}_Y$  和  $\mathbf{R}_s$  的特征值分别为  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L$  和  $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_L$ , 则原二元假设检验可等价于

$$H_0: \lambda_{\max} = \lambda_1 = \sigma_n^2, \quad (10)$$

$$H_1: \lambda_{\max} = \lambda_1 = \rho_1 + \sigma_n^2$$

因此 MED 算法将  $T = \lambda_{\max} / \sigma_n^2$  与判决门限  $t_0$  比较, 当  $T < t_0$  时, 就接受  $H_0$ , 否则拒绝  $H_0$ 。虚警概率  $\alpha = \Pr\{\lambda_{\max} / \sigma^2 > t \mid H_0\}$ 。

### 3.2 Tracy-Widom 分布

当不存在发送信号时  $\mathbf{R}_Y = \mathbf{R}_\eta$ , 而高斯白噪声的协方差矩阵  $\mathbf{R}_\eta = E(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T)$  近似服从 Wishart 随机矩阵。根据随机矩阵理论 (Random Matrix Theory, RMT) 可知, Wishart 随机矩阵特征值的联合概率密度分布函数 (PDF) 有着非常复杂的表达式, 并且他的特征值边缘 PDF 也还没有找到一个合适的表达式。幸运的是 Johnstone 和 Johansson 等人已经对 Wishart 随机矩阵的最大特征值分布做了一定的研究<sup>[12-13]</sup>, 研究成果描述如下:

**定理 3-1** 假设噪声为实噪声, 令  $A(Ns) = \frac{Ns}{\sigma^2} \mathbf{R}_\eta$ ,  $\mu =$

$$(\sqrt{Ns-1} + \sqrt{L})^2, \text{ 以及 } v = (\sqrt{Ns-1} + \sqrt{L}) \left( \frac{1}{\sqrt{Ns-1}} + \frac{1}{\sqrt{L}} \right)^{1/3},$$

假设  $\lim_{Ns \rightarrow \infty} \frac{L}{Ns} = c (0 < c < 1)$ , 则  $\frac{\lambda_{\max}(A(Ns)) - \mu}{v}$  必然服从

1 阶 Tracy-Widom 分布  $F_{TW1}(t)$ 。

由定理 3-1 可知, 在主用户信号不存在的情况下, 即  $H_0$  假设成立时, 采样协方差矩阵 (即为噪声协方差矩阵  $\mathbf{R}_\eta$ ) 的最大特征值线性变换式服从 Tracy-Widom 分布, 表现出了一种特定的统计特性。

Tracy-Widom 分布函数的表达形式比较复杂, 没有一个紧凑的表达式。其 1 阶累积分布函数  $F_{TW1}(t)$  为

$$F_{TW1}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_t^\infty (q(u) + (u-t)q^2(u)) du\right) \quad (11)$$

其中,  $q(u)$  是下列 PainlevéII 非线性微分方程的解

$$q''(u) = uq(u) + 2q^3(u) \quad (12)$$

由式 (11) 和式 (12) 可以看出, 求 1 阶 Tracy-Widom 累积分布函数的表达式是很难实现的。幸运的是已经求得了 1 阶 Tracy-Widom 累积分布函数的一些离散值, 并将其制成了一张表格, 由此可以通过查表的方式找到对应的函数值。

### 3.3 基于最大特征值的 GoF 算法

将认知无线电的  $Ns$  个观测值  $\{Y_i\}_{i=1}^{Ns}$  均匀分为  $k$  组, 则每组有  $m = Ns/k$  个样本。即

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{sub1} &= \{Y_i\}_1^m, \\ \mathbf{Y}_{sub2} &= \{Y_i\}_{m+1}^{2m}, \\ &\dots, \\ \mathbf{Y}_{subk} &= \{Y_i\}_{(k-1)m+1}^{km} \end{aligned} \quad (13)$$

对每组  $\mathbf{Y}_{subi}$  做平滑处理, 平滑因子 (smoothing factor) 为  $L$ , 则

$$\mathbf{Y}_{sub}(i) = \begin{bmatrix} Y_{(i-1)m+1} & \dots & Y_{im-1} & Y_{im} \\ Y_{(i-1)m+2} & \dots & Y_{im} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{(i-1)m+L} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, k \quad (14)$$

定义接收信号的自相关函数为

$$r(l) = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} Y(n)Y(n-l), l = 0, 1, \dots, L-1 \quad (15)$$

则接收信号协方差矩阵可以表示为

$$\mathbf{R}_Y(i) = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(L-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & r(L-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(L-1) & r(L-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (16)$$

求得每一组  $\mathbf{Y}_{sub}(i)$  的最大特征值  $\lambda_{\max}(i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ 。将最大特征值  $\lambda_{\max}(i)$  按照升序排列, 于是有  $\lambda_{\max}(1) \leq \lambda_{\max}(2) \leq \dots \leq \lambda_{\max}(k)$ 。

由定理 3-1 可知协方差矩阵最大特征值  $\lambda_{\max}(A(m)) =$

$$\frac{m}{\sigma^2} \lambda_{\max}(\mathbf{R}_\eta(m)) = \frac{m}{\sigma^2} \lambda_{\max}, \text{ 定义}$$

$$y(i) = \frac{\frac{m}{\sigma^2} \lambda_{\max}(i) - \mu}{v}, i = 1, \dots, k \quad (17)$$

则其累积分布函数为

$$F_Y(y) = |\{i: y(i) \leq y, 1 \leq i \leq n\}| / n \quad (18)$$

显然,由定理3-1可知,若 $H_0$ 成立, $F_0(y)$ 服从1阶Tracy-Widom分布 $F_{TW1}(t)$ 。若噪声为复噪声,则 $F_0(y)$ 服从2阶Tracy-Widom分布 $F_{TW2}(t)$ ,其余理论分析均相同。

由此,频谱感知问题转化为如下拟合优度检验问题

$$\begin{aligned} H_0: F_Y(y) &= F_0(y), \\ H_1: F_Y(y) &\neq F_0(y) \end{aligned} \quad (19)$$

采用合适的拟合准则可求出相应的拟合统计量 $T$ ,从而进行判断。

### 3.4 拟合准则的选择

GoF算法的拟合准则包括KS准则,CM准则和AD准则等。

CM检验是AD检验的一个特例。首先对CM检验的统计值做简单的描述。CM检验的统计值 $W^2$ 被定义为

$$W^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} (F_Y(y) - F_0(y))^2 dF_0(y) \quad (20)$$

很明显CM检验的统计值没有给 $F_0(y)$ 的两个尾部足够的权重,容易造成拖尾现象的产生。为了克服这个问题,Anderson和Darling提出了基于CM检验的统计函数AD准则<sup>[7]</sup>,统计量如下

$$A_c^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} (F_Y(y) - F_0(y))^2 \phi(F_0(y)) dF_0(y) \quad (21)$$

其中 $\phi(t)$ 是非负的权重函数,且 $0 \leq t \leq 1$ 。在AD准则中,选用 $\phi(t) = 1/(t(1-t))$ 。结合式(18),可将式(21)中的积分可以分为 $n$ 个部分,分别求积分,化简得

$$A_c^2 = - \frac{\sum_{i=1}^n (2i-1)(\ln Z_i + \ln(1-Z_{n+1-i}))}{n} - n \quad (22)$$

其中 $Z_i = F_0(y_i)$ 。但由式(10)(17)(18)可以看出,当发送信号不存在时, $F_Y(y)$ 与 $F_0(y)$ 重合,当信号存在时,随着信噪比的增大,发送信号的最大特征值 $\rho_1$ 增大,接收信号最大特征值 $\lambda_{\max}$ 增大,从而使得 $F_Y(y)$ 的图像右移,也就是说当信号存在时, $F_Y(y)$ 的图像只可能在 $F_0(y)$ 的下方,即式(19)中的 $H_1$ 假设可以简化为 $F_Y(y) < F_0(y)$ ,从而可以使用单边假设检验,在文献[10]中提出了一种单边假设检验:

$$T = n \int_{-\infty}^{+\infty} (F_0(y) - F_Y(y)) \frac{1}{F_0(y)(1-F_0(y))} dF_0(y) \quad (23)$$

可以化简为

$$T = - \sum_{i=1}^n (\ln(1-Z_i) - \ln(Z_i)) \quad (24)$$

然而无论是AD准则,还是单边AD准则都侧重双尾检验,而当存在发送信号时 $\lambda_{\min}$ 显然不小于噪声方差 $\sigma_n^2$ ,所以应更侧重于右尾检测,因此本文提出了一种新的拟合检测,单边右尾准则:

$$A = n \int_{-\infty}^{+\infty} (F_0(y) - F_Y(y)) \frac{1}{1-F_0(y)} dF_0(y) \quad (25)$$

对于有限的 $n$ 个样本,结合式(18)可将(24)化简:

$$\begin{aligned} A &= n \int_{-\infty}^{+\infty} (F_0(y) - F_Y(y)) \frac{1}{1-F_0(y)} dF_0(y) = \\ &= n \int_{-\infty}^{y_1} (F_0(y) - 0) \frac{1}{1-F_0(y)} dF_0(y) + \\ &= n \int_{y_1}^{y_2} (F_0(y) - \frac{1}{n}) \frac{1}{1-F_0(y)} dF_0(y) + \dots + \\ &= n \int_{y_{n-1}}^{y_n} (F_0(y) - \frac{n-1}{n}) \frac{1}{1-F_0(y)} dF_0(y) + \\ &= n \int_{y_n}^{+\infty} (F_0(y) - \frac{n-1}{n}) \frac{1}{1-F_0(y)} dF_0(y) = \\ &= -n - \sum_{i=1}^n \ln(1-F_0(y_i)) = -n - \sum_{i=1}^n \ln(1-Z_i) \end{aligned} \quad (26)$$

这样在得到 $n$ 个拟合对象后,就可以通过式(26)计算出拟合统计量 $A$ ,将它与判决门限 $t_0$ 进行比较,当 $A < t_0$ 时,就接受 $H_0$ ,认为发送信号不存在,否则拒绝 $H_0$ 。判决门限 $t_0$ 可以通过给定的虚警概率 $\alpha$ ,由式 $\alpha = \Pr\{A > t_0 \mid H_0\}$ 通过蒙特卡洛实验仿真得到。

特别的,采用单边右尾准则的基于最大特征值的GoF检测算法在取 $k=1, m=N_s$ 时,即将 $N_s$ 个观测值 $\{Y_i\}_{i=1}^{N_s}$ 作为一组时,新算法的检测性能与MED算法相当。我们知道当 $P = \Pr\{T_1 > t_1\} = \Pr\{T_2 > t_2\}$ 时,算法采用 $T_1$ 统计量与采用 $T_2$ 统计量具有相同的检测能力。而当新的GoF检测算法在取 $k=1, m=N_s$ 时,新算法统计量和概率分别为

$$\begin{aligned} A &= -n - \sum_{i=1}^n \ln(1-F_0(y_i)) = \\ &= -1 - \ln(1-F_0(y)) \quad (27) \\ P &= \Pr\{A > t_0\} = \\ &= \Pr\{(-1 - \ln(1-F_0(y))) > t_0\} = \\ &= \Pr\{(-1 - \ln(1-F_{TW1}(y))) > t_0\} = \\ &= \Pr\{F_{TW1}(y) > 1 - e^{-(t_0+1)}\} = \end{aligned}$$

$$\Pr\left\{\lambda_{\max}/\sigma^2 > \frac{vF_{TW1}^{-1}(1 - e^{-(t_0+1)}) + u}{N_s}\right\} = \Pr\{\lambda_{\max}/\sigma^2 > t\} \quad (28)$$

与最大特征值检测算法的性能相当。

所提出的单边右尾准则在计算拟合统计量时具有更低的计算复杂度。比较式(22)(24)(26)可以发现,式(22)中由于存在因子(2i-1)所以需要 $n$ 个拟合对象先进行排序,引入了额外的 $O(n \log_2 n)$ 的复杂度,并且式(22)和式(24)需要进行 $2n$ 次的对数运算,而所提出的单边右尾准则只需要进行 $n$ 次对数运算,并且不需要对拟合对象做排序操作,减少了GoF算法中拟合统计量的计算复杂度。

对AD准则<sup>[7]</sup>、单边AD准则<sup>[9]</sup>和本文提出的单边右尾准则的性能进行仿真比较。拟合对象采用高斯拟合<sup>[7]</sup>和卡方分布拟合<sup>[15]</sup>。仿真信道为加性高斯白噪声(AWGN)信道,主用户发送直流信号 $s=1$ 或者高斯信号 $s \sim N(0,1)$ ,虚警概率保持 $\alpha=0.1$ ,采样点数 $N_s=50$ ,蒙特卡洛仿真次数 $M=10000$ 次。仿真图中横坐标为信噪比(SNR),纵坐标为检测概率(Pd)或者虚警概率(Pf)。检测概率指在主用户发送信号时,次级用户检测出存在发送信号的概率,而虚警概率指在主用户不发送信号时,次级用户错误检测出信号的概率。

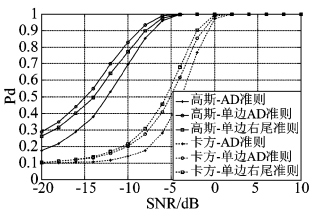


图 1 发送直流信号时,基于高斯分布和卡方分布的GoF算法在不同拟合准则下的性能比较

Fig. 1 When sending direct current signals, the performance of GoF algorithm with gaussian distribution and chi square distribution under different fitting criterion

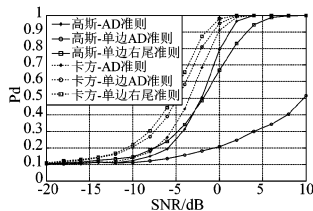


图 2 发送高斯信号时,基于高斯分布和卡方分布的GoF算法在不同拟合准则下的性能比较

Fig. 2 When sending gaussian signals, the performance of GoF algorithm with gaussian distribution and chi square distribution under different fitting criterion

图 3 是主用户不发送信号时,高斯拟合和卡方分布拟合采用不同拟合准则时的虚警概率变化曲线,可以看出虚警概率保持 $\alpha=0.1$ 不变。从图 1 可以看出,当主用户发送直流信号时,基于高斯分布

的GoF检测采用单边右尾准则比采用传统的AD准则性能提高了2 dB,当采用卡方分布拟合时,单边右尾准则性能最优,优于单边AD准则0.5 dB,优于传统AD准则2 dB,因为卡方分布是基于信号能量的拟合,存在发送信号时的累积分布函数 $F_Y(y)$ 的图像只可能在 $F_0(y)$ 的下方,此时更符合单边右尾检测的适用性。从图 2 可以发现当主用户发送高斯信号时,基于高斯分布拟合的GoF检测采用单边AD准则的检测性能急剧下降,而采用单边右尾准则的检测性能在低信噪比下仍优于传统的AD准则,保持较高的检测概率。卡方分布拟合时,单边右尾拟合准则仍是最优的。由以上分析可知,单边右尾拟合准则在主用户发送不同信号和采用不同拟合对象的情况下都具有优异的性能表现。

在本文所提出的基于最大特征值的GoF算法中对采用三种拟合准则的检测性能进行仿真比较。假设信道是加性高斯白噪声(AWGN)信道,主用户发送直流信号 $s=1$ ,虚警概率保持 $\alpha=0.1$ 不变,采样点数 $N_s=50$ ,基于最大特征值的GoF算法将采样点均匀分为 $k=5$ 组,每组10个采样点,为了减少计算复杂度平滑因子取 $L=8$ ,蒙特卡洛仿真次数 $M=10000$ 次。

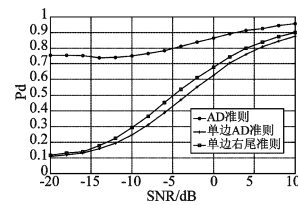


图 4 基于最大特征值的GoF算法在不同拟合准则下的检测性能比较  
Fig. 4 Performance of GoF algorithm with maximum eigenvalue under different fitting criterion

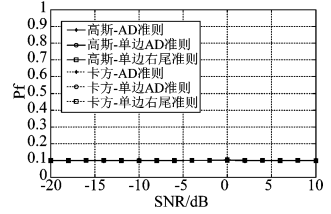


图 3 基于高斯分布和卡方分布的GoF算法在不同拟合准则下的虚警概率比较  
Fig. 3 False alarm probability of GoF algorithm with gaussian distribution and chi square distribution under different fitting criterion

图 5 基于最大特征值的GoF算法在不同拟合准则下的虚警概率比较

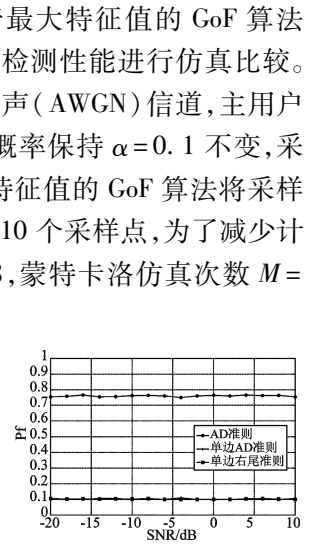


图 5 基于最大特征值的GoF算法在不同拟合准则下的虚警概率比较  
Fig. 5 False alarm probability of GoF algorithm with maximum eigenvalue under different fitting criterion

由图4和图5可得,采用AD准则会使虚警概率偏大,这主要是因为噪声协方差矩阵是通过平滑得到的,所以噪声协方差矩阵  $\mathbf{R}_\eta = E(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T)$  是近似服从 Wishart 随机矩阵,并且采样计算得到的特征点较少,最大特征值的累积分布偏离了理想的统计分布,导致  $Z_i = F_0(y_i) = 0$  的情况出现,从而根据式(22)可知  $A_c^2 \rightarrow \infty$ ,因此无法满足虚警概率的要求。而采用单边AD准则和单边右尾准则,在使其满足虚警概率  $\alpha=0.1$  的情况下,新提出的单边右尾准则具有更好的检测性能,比单边AD准则的检测性能高1 dB左右。所以之后的基于最大特征值的GoF算法将采用单边右尾准则进行仿真。

### 3.5 算法比较

在发送信号为独立同分布的情况下,能量检测算法是最优的算法。但它对噪声方差敏感,需要知道噪声方差  $\sigma^2$ ,是一种经典的半盲检测。统计量  $T_{ED} = \sum_{n=1}^{N_s} |y_n|^2$ ,在  $H_0$  条件下,服从自由度为  $N_s$  的卡方分布。确定虚警概率  $\alpha$ ,则能量检测的阈值为  $\gamma_{ED} = \sigma^2 \cdot \chi_{N_s}^{-2}(1-\alpha)$ 。即当  $T_{ED} > \gamma_{ED}$  时,判为存在主用户信号,否则不存在主用户信号,允许次级用户接入。

为了验证所提算法的优越性,现给出与ED算法、MED算法和AD算法的仿真比较结果。在仿真中,假设信道是频率选择性瑞利衰落信道,虚警概率保持  $\alpha=0.1$ ,多径  $Path=10$ ,平滑因子  $L=8$ ,采样点数  $N_s=50$ ,在基于最大特征值检测的GoF算法中将采样点数均匀分为  $k=5$  组,每组10个采样点,并采用单边右尾准则。主用户分别发送直流信号  $s=1$ 、高斯信号  $s \sim N(0,1)$  和正弦信号  $s = \sqrt{2} \sin(2\pi * t/500)$ ,蒙特卡洛仿真次数  $M=10000$ 。

仿真结果图6是不存在主用户信号的情况下,得到的虚警概率曲线图。从图6中可以发现在仿真中,不同的检测算法的虚警概率保持  $\alpha=0.1$  不变。图7为主用户分别发送直流信号、高斯信号和正弦信号时,四种检测算法的检测性能比较。从图7可以发现当主用户发送直流信号时,AD算法、MED算法和所提出的基于最大特征值的GoF算法的检测曲线存在交叉,但MED和所提算法的检测性能始终优于能量检测算法,且MED算法和所提出算法检测性能基本相同。在较高信噪比时,MED算法和所提出算法性能优于AD算法。例如在  $SNR=4$  dB的时候,MED算法和所提算法的检测概率分别为0.834和0.830,AD算法为0.754,而ED算法的检测概率

为0.794。当主用户发送正弦信号时,可以发现此时AD算法性能明显下降,检测性能明显低于其他算法,而此时的基于最大特征值的GoF算法与MED算法检测性能相当,仍优于ED算法2 dB的检测性能,优于AD算法近10 dB的检测性能。我们已经知道在发送信号为独立同分布的情况下,ED检测算法是最优的检测算法,可以发现当主用户发送高斯信号时,因为信号之间独立同分布,ED算法的检测性能最优。此时所提出的基于最大特征值的GoF算法性能仅次于ED算法,优于MED算法0.5 dB,优于AD算法8 dB,当  $SNR=-4$  时,ED算法的检测概率为0.582,所提算法的检测性能为0.537,而MED和AD算法的检测性能分别为0.485和0.134。并且可以从图中看到当发送信号由直流信号变化为正弦信号时,AD算法检测性能下降了10 dB,而基于最大特征值的GoF算法检测性能提高了1 dB左右,克服了AD算法在检测动态信号时检测性能急剧下降的缺点。

综合仿真结果,可以得到这样的结论:所提出的基于最大特征值的GoF检测算法具有良好的检测性能,并且在检测动态信号时,性能明显优于传统的AD算法,克服了AD检测算法在检测动态信号时性能急剧下降的问题,具有更广泛的适用性。

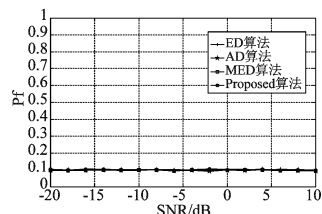


图6 不同检测算法的虚警概率

Fig. 6 The false alarm probability's performance of different detectors

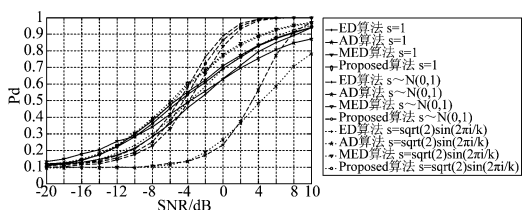


图7 发送直流信号、高斯信号和正弦信号时,不同检测算法的性能比较

Fig. 7 When sending direct current signals, gaussian signals, and sine signal, the performance of different detectors

### 3.6 实验分布与理论分布比较

由于噪声协方差矩阵  $\mathbf{R}_\eta = E(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^H)$  近似服从 Wishart 随机矩阵,并且采样点数较少,最大特征值

的累积分布函数与 1 阶 Tracy-Widom 分布  $F_{TW1}(t)$  存在一定偏差。通过数据采样统计分析可以得到最大特征值的经验累积概率分布函数 (ECDF)  $\hat{F}_1$ 。将采用统计分布函数  $\hat{F}_1$  与采用理论分布函数  $F_{TW1}(t)$  的检测算法进行性能比较。从图 8、图 9 和图 10 可以发现,基于最大特征值分布的 GoF 算法在采用实验统计分布  $\hat{F}_1$  时的性能表现与采用理论分布函数  $F_{TW1}(t)$  的表现基本相同。因此在已知噪声方差的情况下检测信号时,可以直接使用 1 阶 Tracy-Widom 分布  $F_{TW1}(t)$  作为  $H_0$  假设下的  $F_0$  分布函数。

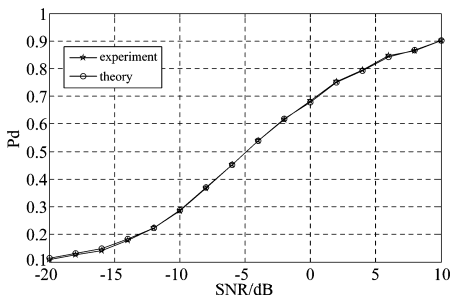


图 8 发送直流信号时,采用理论分布与实验分布性能比较

Fig. 8 When sending direct current signals, the performance of detectors with theoretical value and experimental value

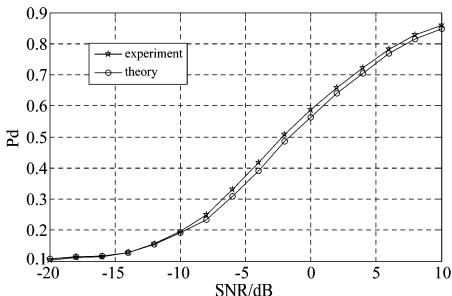


图 9 发送高斯信号时,采用理论分布与实验分布性能比较  
Fig. 9 When sending gaussian signals, the performance of detectors with theoretical value and experimental value

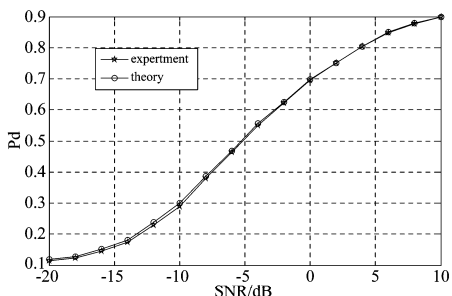


图 10 发送正弦信号时,采用理论分布与实验分布性能比较  
Fig. 10 When sending sine signals, the performance of detectors with theoretical value and experimental value

## 4 结论

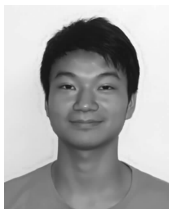
频谱感知算法是认知无线电技术中的研究重点,其中的基于拟合优度的频谱感知算法可以利用较少的采样样本点实现理想的感知效果,但其在检测动态信号时,性能会急剧下降。本文提出了一种基于最大特征值的 GoF 算法和一种新的低复杂度的拟合准则。仿真结果表明,改进的 GoF 算法在检测动态信号时,仍具有优异的检测性能。新的拟合准则在检测不同主用户信号和采用不同拟合对象的情况下都具有优异的检测性能,并且降低了拟合统计量的计算复杂度。

## 参考文献

- [1] Ma J, Li GY, Juang BH. Signal processing in cognitive radio[J]. Proceedings of the IEEE, 2009, 97(5): 805-823.
- [2] Urkowitz H. Energy detection of unknown deterministic signals[J]. Proceedings of the IEEE, 1967, 55(4): 523-531.
- [3] Atapattu S, Tellambura C, Jiang H, et al. Unified analysis of low-SNR energy detection and threshold selection [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2015, 64(11): 5006-5019.
- [4] Li B, Sun M, Li X, et al. Energy detection based spectrum sensing for cognitive radios over time-frequency doubly selective fading channels[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(2): 402-417.
- [5] Zeng Y, Liang YC. Maximum-minimum eigenvalue detection for cognitive radio[C] // IEEE 18th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications 2007 Sep 3, pp. 1-5.
- [6] Zeng Y, Koh CL, Liang YC. Maximum eigenvalue detection: Theory and application [C] // IEEE International Conference on Communications 2008 May 19, pp. 4160-4164.
- [7] Wang H, Yang E H, Zhao Z, et al. Spectrum sensing in cognitive radio using goodness of fit testing [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2009, 8(11): 5427-5430.
- [8] Zhang G, Wang X, Liang YC, et al. Fast and robust spectrum sensing via Kolmogorov-Smirnov test [J]. IEEE Transactions on Communications, 2010, 58(12): 3410-3416.

- [9] Jin M, Guo Q, Xi J, et al. Spectrum sensing based on goodness of fit test with unilateral alternative hypothesis [J]. *Electronics Letters*, 2014, 50(22):1645-1646.
- [10] Tegui D, Le Nir V, Scheers B. Spectrum sensing method based on likelihood ratio goodness-of-fit test [J]. *Electronics Letters*, 2015, 51(3):253-255.
- [11] Stephens MA. EDF statistics for goodness of fit and some comparisons [J]. *Journal of the American statistical Association*, 1974, 69(347):730-737.
- [12] Johnstone IM. On the distribution of the largest eigenvalue in principal components analysis [J]. *Annals of statistics*, 2001, 29(2):295-327.
- [13] Johansson K. Shape fluctuations and random matrices [J]. *Communications in mathematical physics*, 2000, 209(2):437-476.
- [14] Nguyen-Thanh N, Kieu-Xuan T, Koo I. Comments and Corrections Comments on "Spectrum Sensing in Cognitive Radio Using Goodness-of-Fit Testing" [J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2012, 11(10):3409-3411.
- [15] Tegui D, Le Nir V, Scheers B. Spectrum sensing method based on goodness of fit test using chi-square distribution [J]. *Electronics Letters*, 2014, 50(9):713-715.

## 作者简介



**贺亚晨** 男,1993年生,浙江人。大连理工大学硕士研究生,主要研究方向为认知无线电技术。

E-mail: 532600610@mail.dlut.edu.cn



**赵文静** 女,1990年生,辽宁人。大连理工大学博士研究生,主要研究方向为信号处理、雷达信号检测、信息几何等。

E-mail: wenjingzhao2015@mail.dlut.edu.cn



**刘畅** 男,1988年生,河南人。大连理工大学博士研究生,主要研究方向为认知无线电、多天线技术、统计信号处理。

E-mail: liuchang123@mail.dlut.edu.cn



**金明录** 男,1958年生,吉林图们人。大连理工大学信息与通信工程学院教授,博士生导师,主要研究方向为信号与通信系统基础理论和技术。

E-mail: mljin@dlut.edu.cn